MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC. DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XXXI

Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini

Par M. Bertrand GAMBIER

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1928


NORTHEASTERN UNIVERSITY
LVX
VERITAS
VIRTVS
FOUNDED A.D. 1898
BOSTON, MASSACHUSETTS

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
83116 Quai des Grands-Augustins, 55.

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.,
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :
Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées. ».

FASCICULE XXXI

Applicabilité des surfaces étudiée au point de vue fini

PAR M. BERTRAND GAMBIER
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1928

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

APPLICABILITÉ DES SURFACES
ÉTUDIÉE DU POINT DE VUE FINI

Par M. Bertrand GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

INTRODUCTION.

Le problème de l'applicabilité a été étudié du point de vue différentiel dans un précédent fascicule, divisé en trois chapitres : 1° détermination et classification des invariants et paramètres différentiels; 2° reconnaître si deux surfaces données sont isométriques; 3° étude de l'équation aux dérivées partielles de Monge-Ampère dont dépend la déformation d'une surface donnée.

Il s'agit maintenant d'étudier la *réalisation* des théories ainsi formulées. Ce fascicule est divisé en deux chapitres : le premier étudie les principales familles (à un ou plusieurs paramètres) connues de surfaces toutes isométriques entre elles ou les couples remarquables de surfaces isométriques : pour les familles, dépendant de deux fonctions arbitraires, relatives aux cas malheureusement trop rares où l'équation de la déformation est complètement intégrable, la question a été résolue au fascicule précédent; la théorie du *parallélisme* de Peterson [42] ou de la *stratification* de ∞^3 facettes, due à M. Bianchi [4], permet de faire rentrer dans un tout harmonieux les résultats épars dus aux divers chercheurs isolés; j'ai tâché de résumer aussi clairement et succinctement que possible les beaux résultats de M. Bianchi [5] sur la déformation des quadriques; l'étude de la *déformation infiniment petite* se rattache étroitement à la détermination des familles isométriques possédant un réseau conjugué permanent; il était donc naturel que ce premier chapitre accordât

une large part à ce problème qui d'ailleurs est important aussi pour la méthode de H. Weyl [49] exposée au second chapitre. Ce second chapitre étudie d'abord quelles sont les régions *réelles* qui se correspondent dans l'isométrie de deux surfaces réelles; il y a une circonstance, assez paradoxale au premier abord, qui se présente pour certaines surfaces réelles isométriques, c'est le cas où chaque point réel de l'une a un homologue imaginaire sur l'autre : j'indique des propriétés d'auto-isométrie de ces surfaces. Enfin il est naturel de se demander si une surface *fermée* peut être déformée dans son *intégrité*, qu'il s'agisse soit d'une déformation *infiniment petite*, soit d'une déformation finie; M. H. Weyl a démontré ce beau résultat, d'abord qu'une surface fermée, convexe, sans singularité, de courbure totale 4π, ne peut être déformée, ni infiniment peu, ni d'une façon finie, avec conservation de toutes ces qualités, puis, que cette surface est définie, *in abstracto*, par son seul ds^2 : j'indique le principe de la démonstration de M. H. Weyl, en signalant les généralisations qu'il y aurait lieu de faire pour certaines surfaces convexes, ou non, mais fermées, et peut-être aussi les simplifications ou perfectionnements que l'on devrait essayer d'apporter aux démonstrations de M. Weyl.

La géométrie Infinitésimale est peut-être l'une des branches des Sciences mathématiques où le jeune chercheur aperçoit le moins aisément la coordination des idées générales au milieu des résultats isolés : j'espère l'y avoir aidé, conformément à l'esprit de cette collection.

CHAPITRE I.

FAMILLES ET COUPLES ISOMÉTRIQUES. PARALLÉLISME, STRATIFICATION, DÉFORMATION INFINIMENT PETITE. RÉSULTATS DE M. BIANCHI SUR LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES.

1. Nature des familles ou couples isométriques à chercher. — Nous avons vu au Chapitre II du fascicule précédent, les cas précis où l'équation de la déformation s'intègre complètement; c'est un fait remarquable que chacun des types correspondants ait été obtenu par la méthode de Weingarten [48], combinée avec les résultats de MM. Goursat [26], [27] et Baroni [9]; l'étude directe de l'équation de

Monge-Ampère, faite par MM. Gau [24] et Gosse [25], a montré que ces divers types, déjà connus, étaient les seuls. En dehors d'eux, les surfaces réglées sont le seul échantillon fournissant une solution dépendant d'une fonction arbitraire, correspondant nécessairement (sinon la proposition serait contradictoire) aux surfaces réglées applicables sur la surface de départ : cette déformation des surfaces réglées s'obtient explicitement par des quadratures; je renvoie au Tome 3 de la *Théorie des surfaces* de Darboux.

Ceci explique pourquoi les diverses surfaces isométriques connues, restant à signaler, ne peuvent que comprendre soit des familles à nombre fini de paramètres, soit des couples isolés; nous ne faisons pas de distinction ici entre deux surfaces égales ou symétriques. Le plus beau résultat que l'on puisse obtenir ne peut donc que se réduire à ceci : trouver une surface S d'où nous puissions déduire une surface S_1, applicable sur S, et dépendant d'un nombre fini de paramètres, telle que la même opération puisse se répéter sur S_1, au lieu de S, les paramètres entrant dans S_2 étant distincts de ceux entrant dans S_1, et ainsi de suite, de façon à avoir une chaîne dénombrable de surfaces toutes isométriques, contenant un nombre de paramètres de plus en plus élevé, mais toujours *fini* : c'est ce que M. Bianchi a fait pour les quadriques et ce sera l'un des plus beaux titres de gloire de M. Bianchi [5] : déjà d'autres chercheurs ont cherché à étendre ce genre de recherches à d'autres types (surfaces tétraédrales par exemple, travaux de M. Jonas [33]). Il est très vaisemblable que le même progrès peut être réalisé, sinon pour un ds^2 *quelconque*, du moins pour une classe très étendue de ds^2 qu'il y aurait lieu de déterminer.

2. Surfaces de révolution, surfaces hélicoïdales. — Le premier exemple à signaler de familles isométriques est celui des surfaces de révolution ou hélicoïdales représentatives d'un ds^2 de révolution donné *a priori*. C'est Minding [40] puis Bour [13] qui ont signalé les premiers ces exemples; prenons le ds^2 de révolution sous la forme *canonique* [U fonction de u seul (¹)]

$$ds^2 = U^2(du^2 - dv^2). \tag{1}$$

(¹) En posant $U\,du = d\bar{u}$, on a l'autre forme canonique $d\bar{u}^2 + U^2\,dv^2$ souvent employée; il est facile de modifier les formules (2) et (3) en conséquence.

On obtient ∞^2 surfaces représentatives (h, m constantes arbitraires)

$$(2)\qquad X = r\cos\left(\frac{v}{m} - \omega\right),\qquad Y = r\sin\left(\frac{v}{m} - \omega\right),\qquad Z = hv + z,$$

r, ω, z étant trois fonctions de u définies par

$$(3)\qquad r^2 = m^2(U^2 - h^2),\qquad z'^2 = U^2 - m^2 U'^2 - h^2,\qquad \omega' = \frac{-hz'}{m(U^2 - h^2)}.$$

Les formes révolutives correspondent à $h = 0$, les formes hélicoïdales proprement dites à $h \neq 0$.

Pour $h = 0$, on a donc ∞^1 surfaces de révolution applicables entre elles, avec un *réseau conjugué permanent*, à savoir celui des parallèles et méridiens. Prenons comme prototype de la famille la surface S obtenue pour $m = 1$, que nous supposerons réelle; les autres s'obtiennent en multipliant le rayon $r = U$ du parallèle par m, divisant la longitude par m et calculant z par la quadrature

$$\int \sqrt{U^2 - m^2 U'^2}\, du;$$

pour $m < 1$, la nouvelle surface obtenue S_m offre toujours une région réelle comme homologue d'une région réelle de S, mais quand S vient s'appliquer sur S_m, on doit supposer S_m composée de plusieurs feuillets superposés; pour $m > 1$, la région réelle de S représentée par S_m correspond à l'inégalité $\frac{U}{U'} > m$; or, si M est un point de la méridienne de S, T le point où la tangente en M perce l'axe de révolution, et μ la projection de M sur l'axe, on a

$$\frac{M\mu}{MT} = \left|\frac{U'}{U}\right|;$$

de la sorte, soit ω l'angle aigu, pris en valeur absolue, de la tangente à la méridienne avec la direction des parallèles et soit $\frac{1}{m} = \cos\omega_0$; on doit avoir $\omega > \omega_0$; soit r_0 le parallèle de S pour lequel l'angle ω devient égal à ω_0; si la concavité de la méridienne est tournée vers l'axe de révolution, on peut remplacer $\omega > \omega_0$ par $r > r_0$; si au contraire, la convexité est tournée vers l'axe de révolution, on remplace $\omega > \omega_0$ par $r < r_0$; d'autre part les géodésiques de S tangentes

au parallèle r_0 ont pour équation

$$dv = \frac{\pm r_0\, du}{\sqrt{r^2 - r_0^2}},$$

de sorte qu'elles remplissent la région $r > r_0$; sur la surface S_m, le parallèle $r = r_0$ de S est transformé en parallèle de rebroussement et nous voyons que *la surface S_m recouvre la région de concavité ou convexité géodésique de S au voisinage du parallèle r_0 suivant que le long de ce parallèle la courbure totale de S est négative ou positive.*

Prenons maintenant un hélicoïde H (h, m); on peut déterminer ∞^1 hélicoïdes tels que le parallèle de rayon $r_0 = U_0$ de la surface révolutive S prototype déjà utilisée devienne hélice de rebroussement sur H; les paramètres h et m sont déterminés alors par l'équation

$$U_0^2 - m^2 U_0'^2 - h^2 = 0;$$

nous allons montrer que l'on peut obliger ces hélicoïdes à recouvrir la région de concavité géodésique du parallèle de S ou la région de convexité géodésique. Nous pouvons supposer que U soit positif; la région recouverte de S est déterminée par l'inégalité

$$U^2 - m^2 U'^2 - h^2 > 0.$$

ce qui, au voisinage du parallèle critique $r = r_0$ de S revient à

$$U_0'(U_0 - m^2 U_0'')(u - u_0) > 0;$$

sur H le parallèle r_0 de S est transformé en une hélice congruente à l'hélice

$$(4)\qquad X = \rho\cos\varphi, \qquad Y = \rho\sin\varphi, \qquad Z = hm\varphi, \qquad \rho = m\sqrt{U_0^2 - h^2} = m^2 U_0'.$$

Le rayon de courbure R ou de torsion T de cette hélice, la courbure totale K de S ou H sont donnés par

$$(5)\qquad \frac{1}{R} = \frac{U_0'}{U_0^2}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{-h}{mU_0^2}, \qquad K = \frac{U_0'^2 - U_0 U_0''}{U_0^4}.$$

Introduisons une quantité géométrique nouvelle θ définie par

$$(6)\qquad \theta = \frac{1}{T^2} + K = \frac{h^2 - m^2 U_0'^2 - m^2 U_0 U_0''}{m^2 U_0^4} = \frac{U_0 - m^2 U_0''}{m^2 U_0^3}.$$

L'inégalité annoncée revient donc à $\theta.\ U'_0(u - u_0) > 0$, ou puisque sur S, $r = U$, simplement à $\theta.\ (r - r_0) > 0$; si donc l'expression $\frac{1}{T^2} + K$ est négative (ou positive), la région de concavité (ou convexité) de S, au voisinage du parallèle critique est recouverte, à l'exclusion de l'autre, par l'hélicoïde H. Comme vérification, l'hélice de rebroussement a bien comme courbure la courbure géodésique $\frac{1}{MT}$ du parallèle critique. Le résultat obtenu comprend comme cas particulier celui de la surface de révolution S_m étudiée précédemment. Enfin on remarque que si $U_0 = m^2 U''_0$, on a

$$\frac{1}{T} = \pm\sqrt{-K};$$

l'hélice obtenue ne devient plus sur H une ligne de rebroussement, asymptotique singulière, mais une ligne régulière, asymptotique ordinaire de H; le développement de z'^2 suivant les puissances croissantes de $u - u_0$ commence cette fois par le terme

$$(7)\qquad \begin{aligned} z'^2 &= [U'^2_0 + U_0 U''_0 - m^2(U''^2_0 + U'_0 U'''_0)](u - u_0)^2 + \ldots \\ &= U'_0(U'_0 - m^2 U'''_0)(u - u_0)^2 + \ldots . \end{aligned}$$

L'hélicoïde H n'est réel que si

$$U'_0(U'_0 - m^2 U'''_0) \geqq 0$$

ou encore

$$U'_0\left(U'_0 - \frac{U_0 U'''_0}{U''_0}\right) \geqq 0$$

et, si cela a lieu, il recouvre la surface S de part et d'autre du parallèle $r = r_0$ (on remarquera que si cet hélicoïde exceptionnel est imaginaire, il est représenté par une équation à coefficients réels, car z et ω sont imaginaires pures; les valeurs de v imaginaires pures donnent X réel, Y et Z imaginaires pures). Le lecteur verra sans peine la singularité bien plus compliquée qui a lieu si $U'_0 = 0$, c'est-à-dire si le parallèle u_0 est géodésique : l'hélice transformée est une droite atteinte asymptotiquement par les hélicoïdes en nombre infini obtenus pour $h = U_0$, m quelconque. De même on verra la modification des résultats quand

$$U'_0 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad U'_0 U''_0 - U_0 U'''_0 = 0;$$

comparer avec le Chapitre II, paragraphe I.

Les explications qui précèdent montrent clairement que si le ds^2 donné est réel, défini, positif, on peut, pour des valeurs convenables de h et m, obtenir des surfaces, hélicoïdales ou révolutives, *imaginaires, mais d'équation réelle:* par exemple pour $h = 0$, m réel supérieur à 1, la surface de révolution S_m comprend, pour la nappe réelle S telle que $\left|\frac{U'}{U}\right| < m$, une nappe où les coordonnées X, Y de S_m sont réelles et Z imaginaire pure; on sait que cette nappe imaginaire de S_m, en roulant sur la nappe réelle de S, conduit à des systèmes cycliques réels et à des systèmes triples orthogonaux réels, comme l'explique Darboux [16].

Il est juste de signaler ici le rôle exceptionnel que jouent la sphère et la pseudosphère. Quand deux surfaces de révolution, dont la courbure est variable, sont applicables, les parallèles se correspondent nécessairement, comme courbes le long desquelles la courbure totale a une valeur constante, puis les méridiens, comme trajectoires orthogonales du système précédent : les formules précédentes (2) et (3), avec $h = 0$, donnent donc la solution générale de la déformation d'une surface de révolution en nouvelle surface de révolution. Pour la pseudosphère, le résultat cesse d'être valable ; on peut déterminer directement la méridienne d'une surface de révolution dont la courbure totale est égale à -1 : M étant un point de cette méridienne, C le centre de courbure, N le point où la normale en M coupe l'axe, on doit avoir

$$MC.MN = -1,$$

d'où une équation différentielle du second ordre; l'un des deux paramètres correspond à une translation le long de l'axe et n'a aucun intérêt; l'autre est paramètre de forme; il est plus simple de remarquer que l'élément linéaire de la surface peut recevoir l'une de trois formes types : *parabolique, elliptique, hyperbolique*

$$(8) \qquad du^2 + e^{2u}\,dv^2, \qquad du^2 + \operatorname{sh}^2 u\,dv^2, \qquad du^2 + \operatorname{ch}^2 u\,dv^2.$$

Pour chacune de ces trois formes, les formules (2) et (3) [convenablement modifiées, en tenant compte du choix de la forme canonique $du^2 + U^2\,dv^2$ au lieu de $U^2\,(du^2 + dv^2)$] donnent *des* surfaces de révolution ayant ce ds^2 ; la méridienne (r, z) est définie par les formules suivantes, qui contiennent, au moins pour les deux derniers types, un paramètre m de forme :

type parabolique :

$$r = m\,e^{u}, \qquad z = \int \sqrt{1 - m^2 e^{2u}}\,du;$$

elliptique :

$$r = m \operatorname{sh} u, \qquad z = \int \sqrt{1 - m^2 \operatorname{ch}^2 u}\,du;$$

hyperbolique :

$$r = m \operatorname{ch} u, \qquad z = \int \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sh}^2 u}\,du.$$

et l'on constate que l'on retrouve par ce procédé les ∞^1 formes annoncées de méridiennes. La pseudosphère jouit de cette propriété curieuse qu'en la déformant en surface de révolution, *de façon que les parallèles restent parallèles*, la déformée est la pseudosphère elle-même. Je n'insiste pas davantage sur la forme bien connue des trois types révolutifs.

Pour la sphère, *bien que la même exception subsiste*, il devient presque inutile de la signaler, parce que les *diverses applications de la sphère sur elle-même se réduisent à une superposition ou à une symétrie*, de sorte que sur toute surface de révolution de courbure totale égale à $+1$ les parallèles se transforment toujours en une famille de parallèles de la sphère (la réciproque n'étant pas vraie, ce qui est l'exception signalée).

Si le ds^2 de révolution, $U^2(du^2 + dv^2)$, est quelconque, dans la famille ∞^2 de surfaces révolutives et hélicoïdales, obtenues par (2) et (3), il n'y a que les ∞^1 surfaces révolutives (m quelconque, h nul) qui possèdent un réseau conjugué permanent; nous verrons plus loin, à propos du parallélisme, les formes exceptionnelles de U pour lesquelles on peut extraire de ces ∞^2 surfaces une famille ∞^1 contenant un réseau conjugué, autre que celui des méridiens et parallèles : ce réseau est formé de géodésiques et la famille d'hélicoïdes peut être déduite, par parallélisme, de l'hélicoïde minimum.

3. **Surfaces minima adjointes.** — Les surfaces minima possèdent une propriété importante découverte par Schwarz [43], [44], O. Bonnet [11] (¹) et Peterson [42] : à toute surface minima connue S

$$(1) \qquad x = A_1 + B_1, \qquad y = A_2 + B_2, \qquad z = A_3 + B_3$$

(¹) Le lecteur se rappellera que le but de cette collection n'est pas de dresser un

[A_1, A_2, A_3 fonctions de α; B_1, B_2, B_3 fonctions de β; les courbes (A_1, A_2, A_3) ou (B_1, B_2, B_3) sont minima et de plus imaginaires conjuguées l'une de l'autre si la surface est réelle], correspond par les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} X = A_1 e^{i\omega} + B_1 e^{-i\omega}, \\ Y = A_2 e^{i\omega} + B_2 e^{-i\omega}, \\ Z = A_3 e^{i\omega} + B_3 e^{-i\omega}, \end{cases}$$

où ω est une constante réelle arbitraire, une famille de surfaces applicables sur S, avec conservation du réseau de longueur nulle comme réseau conjugué; ces surfaces sont dites *associées* à la première; *réciproquement, deux surfaces minima applicables sont associées.* Deux surfaces associées se recouvrent dans toute leur étendue et peuvent être effectivement déformées de façon continue l'une en l'autre; les deux surfaces ω et $\omega + \pi$ sont symétriques par rapport à l'origine. La surface particulière $\omega = \frac{\pi}{2}$ ou $\left(\omega = -\frac{\pi}{2}\right)$ est dite *adjointe* de S. Aux points correspondants les plans tangents à deux surfaces associées quelconques sont parallèles, et les éléments linéaires correspondants font entre eux l'angle constant ω; *les réciproques sont vraies.* En particulier, pour deux surfaces adjointes, les éléments homologues sont rectangulaires; les lignes de courbure de l'une correspondent aux asymptotiques de l'autre. Au cours de la déformation continue où la surface S décrit le cycle complet de ses surfaces associées, chaque point de S décrit une ellipse, car (x_0, y_0, z_0) étant les coordonnées du point de la surface adjointe $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$, les formules (2) peuvent être remplacées par

$$(3) \qquad x_0 = i(A_1 - B_1), \qquad y_1 = i(A_2 - B_2), \qquad z_0 = i(A_3 - B_3).$$

$$(4) \qquad \begin{cases} X = x \cos\omega + x_0 \sin\omega, \\ Y = y \cos\omega + y_0 \sin\omega, \\ Z = z \cos\omega - z_0 \sin\omega. \end{cases}$$

historique complet des recherches successives, mais de présenter la synthèse des résultats acquis, et que la science a un caractère essentiellement collectif. Il serait toutefois injuste de ne pas signaler la part prépondérante qui revient au géomètre français O. Bonnet dans le *développement* de la théorie dont ce fascicule et le précédent ne présentent que la *mise au point* réalisée par les efforts combinés de plusieurs générations successives.

Aux points correspondant dans l'applicabilité, les rayons principaux sont les mêmes, car $RR' = -R^2$ se conserve d'après Gauss.

4. Surfaces de translation à profils de translation plans situés dans deux plans rectangulaires. — Soit, en axes rectangulaires, la surface de translation

$$(1) \qquad x = U_1 + V_1, \qquad y = U_2, \qquad z = V_2.$$

Peterson et M. Bianchi [6] ont signalé la famille à un paramètre de surfaces de même définition où a est une constante arbitraire

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= a U_1 + \frac{V_1}{a}, \\ Y &= \int \sqrt{U_1'^2(1-a^2) + U_2'^2}\, du, \\ Z &= \int \sqrt{V_1'^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right) + V_2'^2}\, dv. \end{aligned} \right.$$

U_1 et U_2 sont fonctions de u, et V_1, V_2 de v; les quadratures qui interviennent sont les mêmes que celles relatives à la déformation de la surface de révolution d'axe Oy ayant pour méridienne la courbe $(U_1, U_2, 0)$ ou celle d'axe Oz ayant pour méridienne la courbe $(V_1, 0, V_2)$. Les asymptotiques d'une telle surface s'obtiennent par quadratures, les variables se séparant : si, en effet, on choisit U_2 et V_2 comme variables indépendantes u et v, on obtient l'équation

$$U_1'' du^2 - V_1'' dv^2 = 0$$

pour la surface (1).

5. Déformation de la surface tétraédrale. — C'est à M. Tzitzéica [46] que revient l'honneur d'avoir signalé ce bel échantillon de surfaces. M. Jonas [33] a signalé de belles propriétés nouvelles de leur déformation sans avoir eu connaissance des résultats complets de M. Tzitzéica. J'ai moi-même [18] étudié en détail la déformation de ces surfaces. La sphère S, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ possède ∞^1 représentations paramétriques, par coniques homofocales,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda + a)(\mu + a)}{(a-b)(a-c)}, \\ y^2 &= \frac{(\lambda + b)(\mu + b)}{(b-a)(b-c)}, \\ z^2 &= \frac{(\lambda + c)(\mu + c)}{(c-a)(c-b)}, \end{aligned} \right.$$

λ et μ sont les paramètres curvilignes ; a, b, c sont des constantes que l'on peut, sans restreindre, assujettir aux relations $a = 1$, $b = 0$. La surface *tétraédrale* Σ

$$(2) \qquad \alpha X^{\frac{2}{3}} + \beta Y^{\frac{2}{3}} + \gamma Z^{\frac{2}{3}} = 1$$

admet donc ∞^1 représentations correspondantes, obtenues en écrivant

$$(3) \qquad \alpha^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{3}} = x, \qquad \beta^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{1}{3}} = y, \qquad \gamma^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{3}} = z.$$

Dans chacune de ces représentations, le réseau λ, μ est conjugué ; la courbe $\lambda = \mu$ est une cubique asymptotique de Σ, enveloppe sur Σ du réseau conjugué (λ) ou (μ). Écrivons

$$(4) \qquad \begin{cases} X = A(\lambda + a)^{\frac{3}{2}}(\mu + a)^{\frac{3}{2}}, \\ Y = B(\lambda + b)^{\frac{3}{2}}(\mu + b)^{\frac{3}{2}}, \\ Z = C(\lambda + c)^{\frac{3}{2}}(\mu + c)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Si nous calculons en fonction de A, B, C, a, b, c considérés comme données, les constantes inconnues A′, B′, C′, a', b', c' par les équations

$$(5) \qquad A^2 a^i + B^2 b^i + C^2 c^i = A'^2 a'^i + B'^2 b'^i + C'^2 c'^i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4);$$

on a une solution dépendant d'une constante arbitraire, et la surface Σ' correspondant à ces valeurs (A′, B′, C′, a', b', c') est applicable sur Σ, l'applicabilité ayant lieu par les points de même λ, μ. Les équations (5) expriment d'ailleurs l'*égalité* (ou la symétrie) des deux cubiques gauches $\lambda = \mu$ de Σ et de Σ', enveloppes de courbes du réseau conjugué. Au fond, la propriété est le développement de celle-ci : la cubique gauche $A(\lambda + a)^3$, $B(\lambda + b)^3$, $C(\lambda + c)^3$ a pour cône directeur de ses tangentes un cône de second degré inscriptible dans *un*, *donc* ∞^1 trièdres trirectangles ; on déplace la cubique de façon que chacun des trièdres trirectangles, dont les faces sont osculatrices à la cubique, vienne successivement coïncider avec le trièdre OXYZ. Deux surfaces tétraédrales Σ, Σ', définies par leur équation, (2) pour Σ et analogue avec α', β', γ' pour Σ', sont applicables si la fonction I

$$(6) \qquad I = \frac{(\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 - 2\beta^3\gamma^3 - 2\gamma^3\alpha^3 - 2\alpha^3\beta^3)^2}{\alpha^3\beta^3\gamma^3} = \frac{1}{m^3}$$

a la même valeur pour Σ et Σ'. M. Tzitzéica et M. Jonas ont abordé ensuite le problème plus général : trouver *toutes* les surfaces déformées de Σ ; c'est cette question que je vais essayer de résumer.

Si I est nul, le ds^2 de la surface est réductible à la forme

$$(7) \qquad ds^2 = v\,du^2 + 2u\,du\,dv + dv^2$$

que *l'on sait déformer complètement* ; en effet, posant

$$(8) \qquad \frac{u^2}{2} + v = u_1, \qquad \frac{u}{\sqrt{2}} = v_1,$$

on obtient la forme de Weingarten [48]

$$(9) \qquad ds^2 = du_1^2 + 2(u_1 - 3v_1^2)\,dv_1^2.$$

La méthode de Weingarten ramène la déformation du ds^2 (7) ou (9) à la recherche des surfaces telles que

$$(10) \qquad \rho' - \rho'' = 4p,$$

ρ' et ρ'' étant les rayons principaux, p la distance de l'origine au plan tangent. L'équation (10) revient à intégrer l'équation

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial\alpha\,\partial\beta} + 3p^2 = 0$$

et à prendre l'enveloppe du plan

$$(12) \qquad (\alpha + \beta)x + i(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z - p(1 + \alpha\beta) = 0.$$

Si I n'est pas nul, le ds^2 de la surface est réductible à la forme

$$(13) \qquad ds^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 + 2m\,du\,dv + v\,dv^2).$$

Déterminer la *surface générale* représentative de (13) revient, d'après la méthode de Weingarten, à déterminer une surface (σ) satisfaisant à l'équation (avec les mêmes notations ρ', ρ'', p)

$$(14) \qquad \rho'\rho''p^4 = m^3.$$

La surface σ étant lieu du point (x, y, z), soit (ξ, η, ζ) le pôle relativement à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = m$ du plan tangent à σ en x, y, z ; ce *pôle décrit une surface* (σ') *satisfaisant aussi* à l'équation (14), et l'on a une surface Σ représentative de (13) en faisant les qua-

dratures

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{2X}{3} = \displaystyle\int \xi\, du - x\, dv, \quad \dfrac{2Y}{3} = \int \eta\, du - y\, dv, \quad \dfrac{2Z}{3} = \int \zeta\, du - z\, dv, \\ v = x^2 + y^2 + z^2, \qquad u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \end{cases}$$

Les *caractéristiques de l'équation* (14) *sont les asymptotiques.* Les surfaces tétraédrales du type $I \neq 0$ correspondent à une quadrique Q de centre O : P étant un plan tangent au cône asymptote, le faisceau $Q + \lambda P^2 = 0$ fournit ∞^1 surfaces tétraédrales se raccordant le long de deux cubiques gauches symétriques relativement à l'origine ; chacune des deux génératrices $Q = 0$, $P = 0$ fournit l'une ou l'autre de deux surfaces parabolo-tétraédrales (a, b constantes, $ab = m$)

$$(16)\qquad X = (u - a^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad Y = (v - b^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad Z = \frac{3}{2}[a(u - a^2) + b(v - b^2)]$$

applicables sur l'élément (13).

L'équation (14) possède une propriété importante : une *transformation affine de centre* O, *conservant les volumes, remplace une surface σ par une autre surface solution ;* comme une rotation d'ensemble de σ autour de O entraîne la même rotation pour l'ensemble σ, σ', Σ, il ne *reste que cinq paramètres dans cette transformation de* Σ : la surface transformée Σ_1 s'obtient par trois quadratures. Appliquée à une surface tétraédrale, ceci n'introduit que les deux paramètres que nous avons signalés (choix de la cubique asymptotique, puis déformation le long de cette cubique restant invariante), parce que trois paramètres sont absorbés par la transformation de Q en elle-même, un système de trois diamètres conjugués se transformant successivement en les divers systèmes analogues. La surface σ, d'équation $xyz = 1$, d'où $m = 3$, est un échantillon curieux, pour lequel la transformation annoncée dépend de trois paramètres au lieu de cinq.

Sur toute surface Σ *d'élément* (13), *ou sur toute surface* σ *solution de* (14), *les asymptotiques se déterminent par quadratures.*

Introduisons maintenant une simplification : soient deux ds^2 du même type correspondant à deux valeurs différentes de m, à

savoir m et $\overline{m}$

$$ds^2 = \frac{9}{4}(u\,du^2 + 2m\,du\,dv - v\,dv^2), \tag{13}$$

$$ds'^2 = \frac{9}{4}(\overline{u}\,d\overline{u}^2 + 2\overline{m}\,d\overline{u}\,d\overline{v} - \overline{v}\,d\overline{v}^2). \tag{13'}$$

On peut obtenir toutes les surfaces représentatives de (13′) en faisant une homothétie de rapport k sur les diverses surfaces représentatives de (13), ce qui se traduit par

$$ds'^2 = k^2\,ds^2, \qquad u = \lambda\overline{u}, \qquad v = \lambda\overline{v}, \qquad \lambda = \frac{m}{\overline{m}}, \qquad k = \left(\frac{\overline{m}}{m}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

L'homothétie est réelle si $\overline{m}$ et m ont le même signe; sinon k est imaginaire pure. Nous pouvons donc nous borner à $m = -1$. Dans ces conditions, trouver toutes les surfaces représentatives de (13), avec $m = -1$, revient à déterminer toutes les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = e^{\theta} - e^{-2\theta}. \tag{17}$$

A une solution θ connue correspondent, sauf rotation autour de l'origine, ∞^5 surfaces (σ) solutions de (14) (avec $m = -1$) ainsi obtenues : le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2} &= \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + e^{-\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}, \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= e^{\theta}\xi, \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2} &= e^{-\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\theta}{\partial\beta}\frac{\partial\xi}{\partial\beta} \end{aligned}\right. \tag{18}$$

est *complètement* intégrable, en vertu de (17); ce système (18) admet trois intégrales linéairement indépendantes ξ, η, ζ, et si l'on écrit, pour définir Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} & \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} & \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial\xi}{\partial\beta} & \frac{\partial\eta}{\partial\beta} & \frac{\partial\zeta}{\partial\beta} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

on trouve aussitôt

$$\frac{\partial\log\Delta}{\partial\alpha} = \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial\log\Delta}{\partial\beta} = \frac{\partial\theta}{\partial\beta} \tag{20}$$

où $\Delta = ce^{\theta}$, où c est une constante : on peut prendre $c = -1$ à condition de multiplier ζ, par exemple, par un facteur convenable ; écrivons donc

$$\Delta = -e^{\theta}. \tag{21}$$

La surface (ξ, η, ζ) est alors solution de $\rho'\rho''p^4 + 1 = 0$; la surface (x, y, z) polaire réciproque de (ξ, η, ζ) par rapport à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ s'obtient aussitôt ; puis les variables $u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ et $v = x^2 + y^2 + z^2$; les formules (15) donnent une surface Σ de ds^2 (13) avec $m = -1$; les paramètres α et β sont ceux des asymptotiques de (ξ, η, ζ), (x, y, z), (X, Y, Z). La substitution linéaire homogène de déterminant 1 sur (ξ, η, ζ) définit du même coup ∞^5 surfaces Σ. L'intégration du système (18) revient à l'intégration d'une équation de Riccati, car la connaissance de θ revient à déterminer Σ par une solution connue (D, D′, D″) du système de Gauss-Codazzi. [Pour une surface à courbure totale constante, on a de même à intégrer l'équation $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = e^{\theta} - e^{-\theta}$ analogue à (17), puis un système complètement intégrable, analogue à (18).]

Or toute équation $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = f(\theta)$, où f est une fonction connue, jouit de cette propriété importante, remarquée par Sophus Lie pour les surfaces à courbure totale constante, que la solution $\theta = f(\alpha, \beta)$ fait connaître immédiatement ∞^1 solutions nouvelles $\theta = f\left(c\alpha, \frac{\beta}{c}\right)$, où c est une constante arbitraire : le pendant de la transformation de Lie, des surfaces à courbure totale constante, est donc, ici, cette transformation (T) de Tzitzéica : nous appellerons T_n la transformation où la constante n est liée à c par la relation $\frac{1+n}{1-n} = c^3$; le système (18) est remplacé par

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{1+n}{1-n} e^{\theta} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha\, \partial \beta} &= e^{\theta} \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} &= \frac{1-n}{1+n} e^{-\theta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}, \end{aligned} \right. \tag{18'}$$

où θ est restée la même fonction.

M. Bianchi [7] avait trouvé en 1879 la transformation *complémentaire* des surfaces à courbure totale constante (transformation à *un* paramètre faisant correspondre à la première surface connue une autre telle que la congruence de leurs tangentes communes soit congruence de normales, transformation dépendant d'une équation de Riccati). Bäcklund [1, 2, 3], en 1883, généralisa la transformation complémentaire; ses efforts, combinés avec celle de M. Bianchi, aboutirent à la transformation générale des surfaces à courbure totale constante, dépendant cette fois de *deux* paramètres, toujours obtenue par une équation de Riccati : si l'on appelle L la transformation de Lie [38] $\left[\text{passage de } \theta(\alpha, \beta) \text{ à } \theta\left(c\alpha, \frac{\beta}{c}\right)\right]$, L^{-1} consistera à remplacer c par $\frac{1}{c}$; appelons C la transformation complémentaire et B la transformation générale de Bäcklund, on a

$$B = LCL^{-1}. \tag{22}$$

Or pour les surfaces Σ, σ, σ' étudiées ici, M. Jonas a imaginé une transformation Θ_n complétant T_n de la même façon que la transformation B de Bäcklund complète la transformation L de Lie; cette transformation Θ_n est basée sur la transformation des équations de Moutard imaginée aussi, avec les théorèmes de permutabilité, par M. Bianchi. Ici, ξ, η, ζ, x, y, z sont six solutions de la même équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\alpha\,\partial\beta} = e^{\theta} R, \tag{23}$$

où θ est solution de (17). Nous déterminons une intégrale R du système (18′), où n est supposé différent de zéro ou 1; les trois surfaces (ξ, η, ζ) (x, y, z) et (X, Y, Z) sont supposées rapportées à leurs asymptotiques (α, β), et nous calculons

$$\text{(24)} \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= n^{\frac{2}{3}} \left\{ \xi - \frac{e^{-\theta}}{R} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\partial R}{\partial\beta} \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\partial R}{\partial\alpha} \frac{\partial\xi}{\partial\beta} \right] \right\}, \\ x_1 &= n^{\frac{2}{3}} \left\{ x - \frac{e^{-\theta}}{R} \left[(1 - n) \frac{\partial R}{\partial\beta} \frac{\partial x}{\partial\alpha} + (1 - n) \frac{\partial R}{\partial\alpha} \frac{\partial x}{\partial\beta} \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

puis η_1, ζ_1, y_1, z_1 par permutations circulaires; soit

$$u = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \qquad v_1 = x_1^2 + y_1^2 = z_1^2, \tag{25}$$

$$\text{(26)} \quad X_1 = X + u_1\xi_1 - v_1 x_1 - u\xi - vx + n^{\frac{1}{3}}(\eta_1 z - \zeta_1 y) + n^{-\frac{1}{3}}(y_1\zeta - z_1\eta)$$

avec formules semblables pour Y_1 et Z_1 : la surface (X_1, Y_1, Z_1) a pour ds^2

$$ds_1^2 = \frac{9}{4}(u_1\,du_1^2 - 2\,du_1\,dv_1 - v_1\,dv_1^2) \tag{27}$$

avec

$$dX_1 = \frac{3}{2}(\xi_1\,du_1 - x_1\,dv_1), \qquad dY_1 = \ldots \qquad dZ_1 = \ldots \tag{28}$$

L'obtention de $\Sigma_1(X_1, Y_1, Z_1)$ dépend à la fois du choix de n, puis du choix de R, ce qui fait *trois* constantes (au lieu de *deux* pour la transformation de Bäcklund) pour la transformation Θ_n.

Imaginons maintenant que de Σ on ait déduit par une transformation Θ_{n_1} une surface Σ_1, puis par une transformation Θ_{n_2} une surface $\Sigma_2(n_1 n_2 \neq 1)$; on obtient, en termes finis, une surface Σ_3 transformée à la fois de Σ_1 par une transformation Θ_{n_2} et de Σ_2 par une transformation Θ_{n_1} : c'est le théorème de *composition et permutabilité.* Pour $n_1 n_2 = 1$, il faut que les solutions R_1 et R_2 satisfassent à une certaine relation numérique convenable entre les constantes dont elles dépendent, et cela posé, le théorème de permutabilité subsiste, mais la quatrième surface (x_3, y_3, z_3) dépend d'une constante arbitraire et s'obtient par une quadrature. Ce dernier cas particulier, $n_1 n_2 = 1$, avec la restriction convenable sur R_1, R_2, jouit d'une propriété importante : écrivons

$$\Sigma, \quad \Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma. \tag{29}$$

Σ_1 est supposée correspondre à Σ par Θ_n et R_1 ; Σ_2 à Σ par $\Theta_{\frac{1}{n}}$ et R_2 : de la sorte Σ correspond à Σ_2 par Θ_n et $\frac{1}{R_2}$; on constate que Σ_2 correspond à Σ_1 par Θ_n et $\frac{R_2}{R_1}$, de sorte que le cycle fermé $\Sigma\Sigma_1\Sigma_2$, à trois termes, correspond à la même transformation Θ_n et trois fonctions successives R_1, $\frac{R_2}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, dont le produit égale *un* ; le cycle inverse

$$\Sigma, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_1, \quad \Sigma \tag{30}$$

correspond à

$$\Theta_{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad R_2, \quad \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{1}{R_1};$$

le théorème sur la composition et permutabilité montre que les

transformations Θ_{n_1}, Θ_{n_2}, Θ_{n_3}, ..., appliquées successivement, fournissent à partir d'une première surface connue une succession illimitée de surfaces toutes applicables entre elles, dépendant d'un nombre croissant de paramètres : si l'on sait intégrer (18′) pour une valeur *quelconque* de n, ces surfaces s'obtiennent par des quadratures.

Il existe enfin une surface Σ_{12} *auxiliaire* qui n'est pas applicable sur les surfaces Σ, telle que Σ et Σ_{12} d'une part, puis Σ_{12} et Σ_1 constituent les deux nappes d'une première, puis seconde congruence W [propriété vraie encore pour (Σ, Σ_{12}), puis Σ_{12}, Σ_2)].

Σ et Σ_1 étant obtenues, Σ_2 s'obtient par une *quadrature*, de sorte que la transformation générale Θ_n peut être de ∞^1 façons décomposée en deux transformations asymptotiques; quand Σ_2 a elle-même été choisie, la surface Σ_{12} s'obtient sans quadratures, le point courant de Σ_{12} s'obtient par intersection des trois plans tangents correspondants de Σ, Σ_1, Σ_2. Cette théorie exige une somme énorme de calculs, pour finalement arriver à des résultats extrêmement simples et élégants. Nous verrons plus bas comment M. Bianchi a obtenu, pour les quadriques *générales*, la généralisation de ses résultats relatifs à la sphère $x^2+y^2+z^2=\pm 1$; il était indispensable, pour bien apprécier l'importance capitale des idées de M. Bianchi, d'indiquer un autre exemple que celui des quadriques; les surfaces tétraédrales, grâce à la profondeur des recherches de MM. Tzitzéica et Jonas, nous l'ont offert; depuis le résultat définitif obtenu par MM. Gau et Gosse sur l'irréductibilité de l'équation de Monge-Ampère de la déformation, c'est donc dans la direction de M. Bianchi que la théorie doit faire des progrès : si un ds^2 *quelconque* n'offre pas de telles déformations, il serait intéressant de déterminer les ds^2 *particuliers* qui les offrent.

Dans la classe des surfaces étudiées ici, les surfaces tétraédrales jouent un rôle exceptionnel, ainsi que toutes celles pour lesquelles σ et σ' sont réglées : elles échappent en partie aux transformations indiquées ici. J'ai étudié moi-même les circonstances élégantes qui se produisent dans l'applicabilité les unes sur les autres des surfaces tétraédrales.

6. **Surfaces à courbure moyenne constante.** — Un autre exemple de déformation curieux est celui que Sophus Lie et Ossian Bonnet [12] ont signalé pour les surfaces à courbure moyenne constante. Étant

donnée une surface Σ à courbure totale constante *positive* $\frac{1}{a^2}$, les deux surfaces S_1 et S_2 parallèles à Σ, obtenues en portant sur chaque normale la longueur $+a$ ou $-a$ à partir de son pied, ont leur courbure moyenne constante $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{a}$; ces deux surfaces sont d'ailleurs isothermiques associées; leurs lignes de longueur nulle correspondent aux asymptotiques de Σ. Quand on applique à la surface Σ la transformation de Sophus Lie, déjà indiquée au paragraphe précédent, on déduit de Σ ∞^1 nouvelles surfaces Σ', et par suite, ∞^1 surfaces S'_1 ou S'_2 : les surfaces S'_1 sont toutes applicables entre elles et ont, aux points correspondants dans l'applicabilité, les mêmes rayons principaux, car RR' est le même en vertu du théorème de Gauss, et, d'autre part, $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ a la même valeur $\frac{1}{a}$; la famille S'_2 offre la même particularité.

Cette transformation des surfaces S_1 ou S_2 dépend d'un paramètre; au cours de la déformation, il n'existe pas de réseau conjugué permanent. A signaler que dans la famille de surfaces déduite de Σ, on trouve une surface (réelle) et une seule Σ', qu'Hazzidakis [30] a signalée, dont les lignes de courbure correspondent à celles de Σ; la surface S'_1 correspondante admet avec S_1, comme réseau conjugué, celui des lignes de courbure.

La transformation de Sophus Lie des surfaces à courbure totale constante n'est pas une applicabilité; elle a été déjà signalée au paragraphe précédent; elle le sera de nouveau dans le paragraphe consacré aux résultats de M. Bianchi; il importe de bien séparer les deux points de vue distincts auxquels on peut l'envisager.

Considérons une surface Σ à courbure totale constante *négative*, égale à (-1), rapportée à ses lignes asymptotiques α, β, et sa représentation sphérique σ, donnant les ds^2 respectifs

$$(1)\qquad \begin{cases} (\Sigma) & ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta, \\ (\sigma) & d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 - 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta \end{cases}$$

avec l'équation de condition

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\, \partial\beta} = \sin\omega \cos\omega.$$

A une solution $\omega(\alpha, \beta)$ de (2), correspond le point (c, c', c''), qui

décrit σ, par le système complètement intégrable

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} - \theta - \dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha}\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\log(\sin 2\omega) - \dfrac{2\dfrac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\sin 2\omega}\dfrac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \theta \cos 2\omega = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} - \theta - \dfrac{2\dfrac{\partial \omega}{\partial \beta}}{\sin 2\omega}\dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \theta}{\partial \beta}\dfrac{\partial}{\partial \beta}\log(\sin 2\omega) = 0. \end{cases}$$

L'intégration de (3) revient à une équation unique de Riccati.

On obtient ensuite le point (x, y, z), qui décrit Σ par les formules de Lelieuvre, c'est-à-dire par trois quadratures. La remarque de Sophus Lie consiste à remarquer que $\omega_1 = \omega\left(t\alpha, \dfrac{\beta}{t}\right)$ est une nouvelle solution de (2), quelle que soit la constante t. Si nous adoptons cette valeur nouvelle ω_1, *en conservant les mêmes* α, β, on a les ds^2 nouveaux

$$(1')\quad \begin{cases} (\Sigma_1) & ds_1^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\cos 2\omega_1\, d\alpha\, d\beta, \\ (\sigma_1) & d\sigma_1^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 - 2\cos 2\omega_1\, d\alpha\, d\beta. \end{cases}$$

On a ainsi, une fois Σ_1 obtenue par la nouvelle équation de Riccati, *une correspondance particulière entre* Σ *et* Σ_1 *qui conserve les lignes asymptotiques, les lignes de courbure*

$$(u = \alpha + \beta, \quad v = \alpha - \beta, \quad ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 + \sin^2\omega\, dv^2),$$

mais qui change l'angle des asymptotiques.

On peut, au contraire, sur la surface Σ_1 considérer le point de coordonnées

$$(4)\qquad \alpha_1 = \frac{\alpha}{t}, \qquad \beta_1 = t\beta,$$

de sorte que

$$(5)\qquad \omega_1(\alpha_1, \beta_1) \equiv \omega\left(t\alpha_1, \frac{\beta_1}{t}\right) \equiv \omega(\alpha, \beta).$$

Remplaçons dans (1'), α et β par α_1, β_1 : on a les ds^2 respectifs

$$(1'')\quad \begin{cases} d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + 2\cos 2\omega_1(\alpha_1, \beta_1)\, d\alpha_1\, d\beta_1, \\ d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 - 2\cos 2\omega_1(\alpha_1, \beta_1)\, d\alpha_1\, d\beta_1. \end{cases}$$

Remplaçons maintenant α_1 et β_1 par $\frac{\alpha}{t}$, $t\beta$; on a

$$(1''') \quad \begin{cases} ds_1^2 = \dfrac{d\alpha^2}{t^2} - t^2\, d\beta^2 + 2\cos 2\omega(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \\ d\sigma_1^2 = \dfrac{d\alpha^2}{t^2} - t^2\, d\beta^2 - 2\cos 2\omega(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta. \end{cases}$$

Cette fois on a ainsi réalisé par les points de même α, β sur Σ et sur Σ_1 une correspondance conservant les asymptotiques, leur angle et les *aires :* sur Σ on a une double infinité de *losanges* de même côté l découpés par les asymptotiques

$$\alpha, \quad \alpha \pm l, \quad \alpha \pm 2l, \quad \ldots, \quad \alpha \pm nl, \quad \ldots,$$
$$\beta, \quad \beta \pm l, \quad \beta \pm 2l, \quad \ldots, \quad \beta \pm nl, \quad \ldots.$$

Dans la correspondance nouvelle entre Σ et Σ_1 ces losanges sont remplacés par des *parallélogrammes* de même côté $\frac{l}{t}$ (sur les asymptotiques $\beta = \text{const.}$), lt (sur les asymptotiques $\alpha = \text{const.}$). Sur les représentations sphériques, on a le résultat analogue, sauf que les lignes α, β ne sont pas asymptotiques. Les lignes de courbure $\alpha_1 \pm \beta_1 = \text{const.}$ de Σ_1 ont pour homologue les courbes $\frac{\alpha}{t} \pm t\beta = \text{const.}$ de Σ qui ne sont pas lignes de courbure, sauf pour la valeur $t = \pm i$, qui donne la transformée d'Hazzidakis. C'est à ce second point de vue que l'on étudie la transformation de Sophus Lie pour les surfaces de Bonnet-Lie et pour les surfaces de Voss; c'est, au contraire, au premier point de vue que l'on se pl ce dans la déformation des quadriques de M. Bianchi. Il importait de bien caractériser la différence des points de vue, car, suivant les circonstances, chaque auteur adopte l'un ou l'autre, en oubliant presque toujours de prévenir le lecteur du choix adopté.

Dans le cas de la transformation de Bonnet-Lie pour les surfaces à courbure moyenne constante, il est nécessaire pour la réalité que la surface à courbure totale constante Σ de départ soit à courbure totale *positive :* il suffit, dans les formules qui précèdent, de supposer α et β imaginaires conjuguées, ω imaginaire pure et de faire sur Σ une homothétie de rapport i : la constante t doit avoir l'unité pour module. On pourra, pour éviter l'emploi des imaginaires, écrire le ds^2 de Σ

et σ sous la forme

$$(6)\quad \begin{cases} ds^2 = \operatorname{ch}^2\omega\, du^2 + \operatorname{sh}^2\omega\, dv^2, \\ d\sigma^2 = \operatorname{sh}^2\omega\, du^2 + \operatorname{ch}^2\omega\, dv^2, \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \dfrac{1}{4}(e^{-2\omega} - e^{2\omega}). \end{cases}$$

La transformation de Sophus Lie (premier point de vue) consiste à prendre

$$(7)\quad \omega_1(u, v) = \omega[u\cos\alpha - v\sin\alpha,\ u\sin\alpha + v\cos\alpha].$$

Le second point de vue consiste à écrire

$$(8)\quad \begin{cases} \omega_1(u_1, v_1) = \omega(u, v), \\ u_1 = u\cos\alpha - v\sin\alpha, \qquad v_1 = u\sin\alpha + v\cos\alpha. \end{cases}$$

Les surfaces S_1 et S_2 ont pour ds^2

$$(9)\quad ds^2 = e^{-2\omega}(du^2 + dv^2).$$

La transformée d'Hazzidakis correspond à $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}\cdot$ La forme (9) montre que la correspondance entre le point (u, v) de S_1 et le point (u_1, v_1) de S'_1 obtenu par (8) est bien une application.

7. Déformation avec conservation des rayons principaux. — Cet exemple de déformation à un paramètre, où les rayons de courbure principaux se conservent, n'est pas le seul; nous avons vu que chaque famille de surfaces minima associées donne cette circonstance (cette fois avec un réseau conjugué permanent); il existe encore une série d'autres exemples, étudiés par Ossian Bonnet [12], puis Hazzidakis [31] et M. Servant [45], mais on n'obtient alors que diverses familles de surfaces toutes imaginaires à un paramètre, bien que leur ds^2 convienne à des surfaces réelles : je cite en particulier le ds^2 simple $\left(\frac{U+V}{u+v}\right)^2 du\, dv$, où U et V sont fonctions arbitraires, respectivement du seul u ou v et qui donne la famille de surfaces dépendant du paramètre t :

$$(1)\quad x = \frac{\omega(1-\psi^2) - f}{2}, \qquad y = \omega\psi, \qquad z = \frac{i}{2}[\omega(1+\psi^2) - f]$$

avec

$$(2)\quad \begin{cases} \omega = \dfrac{(v+t)(u-t)}{u-v}, \qquad f = \displaystyle\int \frac{V^2\,dv}{(v+t)^2} - \int \frac{U^2\,du}{(u-t)^2}, \\ \psi = i\left[\displaystyle\int \frac{V\,dv}{(v+t)^2} - \int \frac{U\,du}{(u-t)^2}\right]. \end{cases}$$

On remarquera que $U = iu^2$, $V = -iv^2$ donne

$$ds^2 = -(u-v)^2\, du\, dv,$$

et en remplaçant u, v par $A + iB$ et $A - iB$, on a le ds^2 caractéristique des surfaces développées de surface minima

$$ds^2 = 4B^2(dA^2 + dB^2).$$

Quand le paramètre t augmente indéfiniment, on obtient la surface limite

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-1}{u+v}\,\dfrac{1-\psi_0^2}{2} + \dfrac{f_0}{2}, \\ y = \dfrac{-1}{u-v}\,\psi_0, \\ z = -\dfrac{i}{2}\left[\dfrac{(1+\psi_0^2)}{u+v} + f_0\right]; \end{cases}$$

$$(4) \qquad f_0 = \int V^2\, dv - \int U^2\, du, \qquad \psi_0 = i\int V\, dv - i\int U\, du.$$

8. Déformation où une série de lignes de niveau reste lignes de niveau. — M. Goursat [28] a signalé ce cas intéressant; je l'ai moi-même retrouvé par une méthode plus simple. Prenons une surface développable D arbitraire et traçons les sections de D par une série de plans parallèles choisie arbitrairement : par exemple, les plans $z = \text{const.}$; déplaçons chaque section de cote z, parallèlement à Oz, perpendiculaire à ces plans, de façon à lui donner une nouvelle cote Z, où Z est une fonction $f(z)$ *arbitraire*; la surface S ainsi obtenue possède la propriété d'admettre une déformation continue à un paramètre où les lignes de niveau $z = \text{const.}$ restent lignes de niveau; on remarque que, dans le passage de D à S, chaque génératrice de D devient une courbe plane dans le plan projetant horizontalement la génératrice; ces courbes planes donnent sur S les lignes conjuguées des courbes $z = \text{const.}$, et au cours de la déformation annoncée, ce système conjugué reste conjugué. La surface S est susceptible d'être représentée par les formules paramétriques mettant en évidence ce système conjugué (z), (α)

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(z)\,\theta(\alpha) + \eta(\alpha), \\ y = f(z)\,\theta_1(\alpha) + \eta_1(\alpha), \\ z = z \end{cases}$$

avec les relations différentielles

$$(2)\qquad \frac{\eta'_1(a)}{\theta'_1(a)} = \frac{\eta'(a)}{\theta'(a)}.$$

Les déformées s'obtiennent en écrivant

$$(3)\qquad \begin{cases} X = f(z)\,\bar\theta(a) + \bar\eta(a), \\ Y = f(z)\,\bar\theta_1(a) + \bar\eta_1(a), \\ Z = \int \sqrt{1 + n f'^2(z)}\,dz, \end{cases}$$

où n est une constante; les fonctions $\bar\theta(a)$, $\bar\theta_1(a)$, $\bar\eta(a)$, $\bar\eta_1(a)$ se calculent par les formules

$$(4)\qquad \begin{cases} \bar\theta = \rho\cos\omega, \qquad \bar\theta_1 = \rho\sin\omega, \\ \rho^2 = \theta^2 + \theta_1^2 - n, \\ \dfrac{d\omega}{da} = \dfrac{\sqrt{(\theta^2 + \theta_1^2 - n)(\theta'^2 + \theta_1'^2) - (\theta\theta' + \theta_1\theta'_1)^2}}{\theta^2 + \theta_1^2 - n}, \\ \dfrac{\bar\eta'_1(a)}{\bar\theta'_1(a)} = \dfrac{\bar\eta'(a)}{\bar\theta'(a)} = \dfrac{\eta'(a)}{\theta'(a)}. \end{cases}$$

On peut remarquer que cet exemple comprend un grand nombre de cas connus (surfaces de révolution, surfaces moulures, surfaces de translation à profils plans dans deux plans rectangulaires, surfaces de Peterson ayant un système conjugué doublement de Kœnigs : ces dernières surfaces s'obtiennent en annulant η, η_1, $\bar\eta$, $\bar\eta_1$).

9. Couples isolés de surfaces applicables. — Je cite quelques exemples simples de couples isolés remarquables.

Soit une surface de translation S telle que les cônes directeurs des tangentes à chaque profil de translation A ou B soient homofocaux; il lui correspond une déformée unique S_1 de même définition, telle que le profil A_1 admette pour cône directeur de ses tangentes le même cône que B et inversement B_1 que A. Peterson [42] a le premier cité ces couples : j'en ai moi-même repris l'étude [20].

De même, soit une surface *quelconque* Σ de courbure totale constante $\frac{1}{a^2}$; portons sur chaque normale à Σ une longueur constante b : on obtient ainsi une surface S; S admet une seule déformée S_1 telle que le réseau de courbure soit resté de courbure; S_1 est parallèle, à

la distance constante a, d'une surface Σ_1 à courbure totale constante $\frac{1}{b^2}$: par une homothétie convenable, Σ et Σ_1 deviennent transformées d'Hazzidakis l'une de l'autre. J'ai donné cet exemple [19].

J'ai donné divers autres exemples déduits de la théorie des mécanismes; Peterson a donné aussi d'autres exemples curieux.

10. **Parallélisme de Peterson, réseau conjugué.** — Soient deux surfaces S et S_1 applicables : si l'on écarte le cas de deux surfaces réglées, la correspondance ponctuelle résultant de leur application fournit un réseau conjugué, *et un seul*, formé de deux familles *distinctes;* prenons ces courbes pour lignes de coordonnées u, v; l'équation de Laplace, relative à ce réseau, est

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{2\mathrm{H}^2}\left(\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{1}{2\mathrm{H}^2}\left(\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Elle est la même pour S et S_1, admet pour solutions x, y, z, x_1, y_1, z_1, et, en vertu d'un théorème de G. Kœnigs,

$$x^2 + y^2 + z^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2.$$

Une surface S', *parallèle à* S *suivant le réseau conjugué en jeu au sens de Peterson*, est définie par les équations

$$(2)\qquad dx' = \mathrm{P}\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial v}\,dv, \qquad dy' = \ldots, \qquad dz' = \ldots.$$

où P et Q satisfont aux équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial v} - \frac{1}{2\mathrm{H}^2}\left(\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)(\mathrm{Q} - \mathrm{P}) = 0,\\ &\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u} - \frac{1}{2\mathrm{H}^2}\left(\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)(\mathrm{P} - \mathrm{Q}) = 0\end{aligned}\right.$$

et S' admet pour ds^2

$$(4)\qquad ds'^2 = \mathrm{P}^2\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{PQF}\,du\,dv + \mathrm{Q}^2\mathrm{G}\,dv^2.$$

Mais alors, avec les mêmes P et Q, on obtient une surface S'_1 parallèle à S_1 suivant le réseau (u, v) applicable sur S' avec le réseau (u, v)

conjugué, par les quadratures analogues à (2)

$$(5)\qquad dx'_1 = P\frac{\partial x_1}{\partial u}du + Q\frac{\partial u_1}{\partial v}dv, \qquad dy'_1 = \ldots \qquad dz'_1 = \ldots$$

Suivant que le réseau R correspond à ∞^1 déformées de S ou à une seule, le parallélisme au sens de Peterson donne ∞^1 ou une seule déformée de S'. L'élimination de P ou Q entre (3) conduit à l'une ou l'autre de deux équations de Laplace pour déterminer P ou Q : si P est calculée, Q s'obtient sans quadratures par la première équation (3). Il vaut souvent mieux opérer ainsi pour sauvegarder la symétrie : soit Φ une solution *quelconque* de (1) (Φ pourra être l'une des 7 solutions signalées). On peut remplacer les inconnues P et Q par la seule inconnue Ω telle que

$$(6)\qquad P = \frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}}, \qquad Q = \frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}},$$

et la nouvelle fonction inconnue Ω est simplement assujettie à vérifier l'équation de Laplace

$$(7)\qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2H^2}\left(E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}\right)\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}}\frac{\partial\Omega}{\partial u} - \frac{1}{2H^2}\left(G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}}\frac{\partial\Omega}{\partial v} = 0.$$

Cette propriété permet de découvrir la transformée d'Hazzidakis d'une surface Σ à courbure totale constante $\frac{1}{a^2}$: on peut, par homothétie, prendre $a = 1$; Σ est applicable sur la sphère unité S, de sorte que le réseau C des lignes de courbure reste orthogonal, donc conjugué ; la représentation sphérique S' de Σ est une sphère unité parallèle à Σ, au sens de Peterson, suivant le réseau C ; donc, à S déformée de Σ sur ce réseau conjugué C correspond une surface Σ', parallèle à S suivant ce réseau et applicable sur S', donc à courbure constante unité et *réelle* ; Σ et Σ' se correspondent avec conservation des lignes de courbure ; Σ et Σ' sont déterminées intrinsèquement par les trois

formes fondamentales

$$(\Sigma)\qquad \begin{cases} S\,dx^2 = \operatorname{ch}^2\varphi\,du^2 + \operatorname{sh}^2\varphi\,dv^2, \\ S\,dc\,dx = \operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi(du^2 + dv^2), \\ S\,dc^2 = \operatorname{sh}^2\varphi\,du^2 + \operatorname{ch}^2\varphi\,dv^2. \end{cases}$$

$$(\Sigma')\qquad \begin{cases} S\,dx^2 = \operatorname{sh}^2\varphi\,du^2 + \operatorname{ch}^2\varphi\,dv^2, \\ S\,dc\,dx = \operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi(du^2 + dv^2). \\ S\,dc^2 = \operatorname{ch}^2\varphi\,du^2 + \operatorname{sh}^2\varphi\,dv^2, \end{cases}$$

φ étant solution de l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi = 0.$$

On remarquera que si Σ est réelle, mais à courbure totale constante négative, Σ' devient imaginaire avec deux coordonnées réelles et une autre imaginaire pure.

Cela permet aussi de démontrer qu'en dehors des surfaces de révolution ou des surfaces moulure de Monge, si deux surfaces S et S_1 sont applicables, le réseau de courbure se correspondant, la surface S admet même représentation sphérique de ses lignes de courbure qu'une surface à courbure totale constante (positive si S et S_1 sont réelles toutes deux). En effet, la sphère s, sur laquelle on prend l'image sphérique de S, est parallèle à S au sens de Peterson; donc la déformée connue S_1 de S entraîne une déformée σ_1 de s suivant un réseau rectangulaire : σ_1 est à courbure totale constante et parallèle à S_1; en renversant les rôles de S et S_1, on retrouve la transformée d'Hazzidakis σ de σ_1; d'ailleurs s n'admet, suivant le réseau image des lignes de courbure de S, qu'une déformée σ_1, sauf le cas réservé.

11. Réseau conjugué persistant dans une déformation. — Si nous considérons un ds^2 connu *a priori*, il est facile de voir qu'un réseau connu intrinsèquement ne pourra, en général, jamais devenir conjugué; en effet, ce réseau étant pris comme réseau de coordonnées, E, F, G sont connus et l'on essaie de trouver une solution des équations de Gauss-Codazzi où $\delta' = 0$. L'équation $\delta\delta'' = K(EG - F^2)$ (avec les notations constamment employées ici) permet de ne garder que l'inconnue δ qui se trouve ainsi déterminée par une équation aux différentielles totales, en général sans solution. Ainsi, si le réseau est

celui des lignes de longueur nulle, on a

$$E = G = 0$$

et Gauss-Codazzi donnent $\delta = U$, $\delta'' = V$, où U et V ne dépendent respectivement que de u et v; on a ensuite la condition

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + F^2 UV = 0,$$

qui n'est pas une identité et oblige F à être d'une forme particulière : on retrouve ainsi l'élément caractéristique convenant à une famille de surfaces minima associées. On obtient ainsi la notion de réseaux qui peuvent, au cours de la déformation, devenir conjugués 0, 1, 2 ou ∞^1 fois. Rapportons, en effet, une surface S à un réseau conjugué; on a alors $\delta' = 0$; il s'agit de savoir si l'on peut trouver une nouvelle solution $(\bar\delta, 0, \bar\delta'')$ des équations de Gauss-Codazzi, distincte de $(\delta, 0, \delta'')$ relative à la surface S donnée; on peut poser, avec une unique inconnue λ,

$$(1) \qquad \bar\delta = \lambda\delta, \qquad \bar\delta'' = \frac{\delta''}{\lambda}.$$

On a les deux équations

$$(2) \qquad \frac{\partial\delta}{\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\delta - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\delta'', \qquad \frac{\partial\delta''}{\partial u} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\delta'' - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\delta.$$

En écrivant que $\lambda\delta$ et $\frac{\delta''}{\lambda}$ sont nouvelles solutions de (2), on a

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\delta}{\delta''}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right), \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\delta''}{\delta}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right).$$

En prenant la nouvelle inconnue ν définie par

$$(4) \qquad \lambda^2 = 1 + \frac{1}{\nu},$$

on remplace (3) par

$$(3') \qquad \frac{\partial\nu}{\partial u} = -2(\nu+1)\left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\delta}{\delta''}\right], \qquad \frac{\partial\nu}{\partial v} = -2\nu\left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\delta''}{\delta}\right].$$

La condition d'intégrabilité s'écrit

$$(5) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial u}\left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\delta}{\delta''}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\delta}{\delta''}\right]\right]\nu = 2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\delta}{\delta''}\right].$$

Si le coefficient de ν dans cette équation (5) n'est pas identiquement nul, cette équation (5) fournit une seule valeur de ν, donc, au signe près (ce qui indiffère), une seule de λ et, suivant que cette valeur de ν ne satisfait pas ou satisfait aux équations (3'), il n'existe pas ou existe *une* surface *nouvelle* où le réseau (u, v) est encore conjugué.

Si l'on a simultanément

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\delta''}{\delta}\right]=\frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\delta}{\delta''}\right]=-2\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}, \tag{6}$$

il existe une déformation continue à un paramètre.

Il est très remarquable de signaler, *qu'en supposant* $\delta'=0$, on a

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\delta}{\delta''}=-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}', \qquad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\delta''}{\delta}=-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}', \tag{7}$$

les symboles accentués de Christoffel se rapportant à la représentation sphérique de la surface, c'est-à-dire formés avec la troisième forme fondamentale $\mathrm{S}\,dc^2$ au lieu de la première $\mathrm{S}\,dx^2$, de sorte que (3') et (5) peuvent s'écrire sous forme plus simple

$$\frac{\partial\nu}{\partial u}=2(\nu+1)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}', \qquad \frac{\partial\nu}{\partial v}=2\nu\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}', \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'-\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\right]\nu=2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'-\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}', \tag{9}$$

de sorte que la propriété du réseau ne fait intervenir que sa représentation sphérique : c'est une nouvelle démonstration de la propriété du parallélisme de Peterson signalée au paragraphe précédent. Déterminer en particulier toutes les familles à un paramètre de surfaces applicables avec réseau conjugué permanent, revient à déterminer tous les réseaux sphériques tels que

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'=2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'. \tag{10}$$

Les équations (6) et (10) font immédiatement découvrir une classe importante de surfaces S indiquées la première fois par Voss [47]; les équations

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=0, \qquad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0 \tag{11}$$

expriment que les lignes $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$ sont géodésiques; elles entraînent (6) : *donc, si une surface admet un réseau conjugué formé de géodésiques dans les deux familles, elle admet une déformation continue à un paramètre où ce réseau reste conjugué* [Voss et Guichard ont étudié ces surfaces [1] sans avoir remarqué cette déformation continue à un paramètre, qui n'a été signalée qu'après développement de la théorie exposée dans ce paragraphe, développement dû surtout à M. Bianchi]; les deux équations équivalentes à (11)

$$(11') \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = 0$$

expriment que le $d\sigma^2$ de la sphère (σ) est réductible à la forme

$$du^2 + dv^2 - 2\cos 2\omega\, du\, dv$$

qui montre aussitôt (*voir* § 6), qu'il existe aussi une surface Σ à courbure totale constante dont le ds^2 est

$$du^2 + dv^2 + 2\cos 2\omega\, du\, dv;$$

Σ admet aussi (σ) pour représentation sphérique et les lignes (u, v) sont asymptotiques de Σ : les réciproques sont vraies. La déformation continue de S revient à la transformation de Bonnet-Lie pour Σ (prise au sens où l'angle des asymptotiques et les aires se conservent). Ceci suppose toutefois que les lignes u, v géodésiques de S ne sont pas les géodésiques singulières constituées par les lignes de longueur nulle, mais dans ce cas on a les surfaces minima.

On a ensuite une nouvelle classe de surfaces intéressante, en supposant que l'on a simplement

$$(12) \qquad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Les lignes $v = \text{const.}$ sont géodésiques, mais non les lignes u. M. Bianchi a étudié ces surfaces.

Pour les trois classes ainsi obtenues, suivant que le réseau conjugué permanent comprend 2, 1 ou 0 familles de géodésiques, il y a une propriété importante à signaler, qui se rattache intimement à l'étude

---

[1] Depuis la rédaction de ce fascicule, j'ai publié aux *Acta mathematica*, t. 51, 1927, p. 83-131, un Mémoire détaillé sur les surfaces de Voss-Guichard [23 *bis*].

de la déformation infiniment petite, à la théorie des 12 surfaces de Darboux [17] et aux autres travaux de M. Bianchi [8] sur les congruences W. On appelle congruence W une congruence rectiligne telle que sur les deux nappes de la surface focale les lignes asymptotiques se correspondent; parmi elles, il y a une classe importante W′ telle qu'aux points homologues déterminés sur les nappes focales par chaque rayon de la congruence, la courbure totale des deux nappes soit la même; on constate que si l'on prend pour lignes de coordonnées les asymptotiques de la nappe focale Σ, cette courbure commune peut s'exprimer sous la forme

$$\text{(13)} \qquad K = \frac{-1}{[\varphi(u) - \psi(v)]^2},$$

et *réciproquement :* dans la théorie des 12 surfaces, résultant de la déformation infiniment petite de Σ, il existe une surface S correspondant à Σ par plans tangents parallèles, de sorte que le réseau asymptotique de Σ se transforme en un réseau conjugué de S, tandis que la surface Σ′, seconde nappe de la surface focale de la congruence W′, est celle que Darboux associe à Σ; S est déformable à un paramètre avec conservation du réseau conjugué. Si φ et ψ sont constants, on a pour Σ une surface à courbure totale constante; si φ seul est constant, on a la seconde classe indiquée plus haut (l'hélicoïde minimum est une telle surface Σ), et si ni φ, ni ψ ne sont constants, on a la troisième classe; on peut alors supposer $\varphi = u$, $\psi = v$. Si Σ est paraboloïde hyperbolique équilatère, on obtient les surfaces de translation à profils plans dans deux plans rectangulaires; si Σ est conoïde droit, on obtient les surfaces de M. Goursat avec une série de lignes de niveau persistantes.

D'autre part, à chaque surface Σ de cette classe étudiée ici (équation 13), correspondent ∞^2 surfaces Σ′ de la même espèce, obtenue par une équation de différentielle totale de Riccati (équation où entre une constante arbitraire dans les coefficients de l'équation, soit k). Si Σ_1 est une transformée de Σ relativement à la constante k_1 et Σ_2 une autre relative à k_2, il existe une quatrième surface et une seule Σ_3, *obtenue rationnellement*, qui est transformée k_1 de Σ_2 et transformée k_2 de Σ_1 : ceci s'applique en particulier si Σ est à courbure totale constante. A chacune des ∞^2 transformées de Σ correspond ainsi une surface S (de ds^2 variable), déformable avec un réseau

conjugué, et l'on voit le lien étroit des deux théories : la surface S_1 correspondant à Σ_1 est transformée de S comme Σ_1 de Σ. D'ailleurs, grâce aux formules de Lelieuvre [36], on reconnaît aussitôt que la détermination des surfaces Σ revient à trouver une équation de Moutard

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = M \theta,$$

admettant trois solutions θ_1, θ_2, θ_3 liées par la relation

$$(15) \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \varphi(u) + \psi(v),$$

où φ et ψ sont les fonctions entrant dans (13).

Comme problème intéressant relatif à cette théorie, il y aurait lieu de chercher tous les ds^2 admettant un ou plusieurs réseaux définis *a priori* de l'espèce indiquée.

J'indique quelques cas particuliers : la sphère (en négligeant un déplacement sur elle-même) n'admet qu'un réseau de l'espèce en jeu (¹) : méridiens et parallèles (une des familles est composée de géodésiques); il resterait à savoir quels autres réseaux peut admettre le ds^2, $d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2$. Pour le ds^2, $\operatorname{ch}^2 u \, (du^2 + dv^2)$, qui convient à l'hélicoïde minimum, les ∞^2 géodésiques peuvent être réparties en ∞^1 couples de réseaux conjugués, définis par l'équation

$$(16) \qquad \lambda^2 \, du^2 - (\operatorname{ch}^2 u - \lambda^2) \, dv^2 = 0.$$

Pour chaque valeur de la constante λ, il existe une déformation à un paramètre donnant des hélicoïdes non minimum : l'hélicoïde minimum appartient à chaque famille, et ses ∞^2 hélicoïdes de déformation sont surfaces de Voss une seule fois.

Le ds^2, $u^2(du^2 + dv^2)$, convient aux développées des surfaces minima; lui aussi possède ∞^2 géodésiques que l'on peut répartir

(¹) Si les méridiens sont obtenus comme sections de la sphère par le plan pivotant autour d'un diamètre isotrope, on a un cas exceptionnel; d'une façon générale, chaque surface de révolution admet une déformée imaginaire où l'axe est devenu isotrope, les méridiens et parallèles primitifs se transforment en les pseudo-méridiens et pseudo-parallèles de cette déformée imaginaire. Je développe ce point au *Bulletin de la Société mathématique*, t. LVI, 1928, dans un Mémoire qui paraîtra quelque temps après ce fascicule sous le titre : *Quelques cas méconnus de la déformation des surfaces* [23 *ter*].

comme précédemment en ∞^1 familles

$$\lambda^2\, du^2 - (u^2 - \lambda^2)\, dv^2 = 0 \tag{17}$$

et à chaque famille correspondent ∞^1 hélicoïdes où le réseau reste conjugué permanent; mais ici il n'y a plus de surface commune, comme l'hélicoïde minimum, à ∞^1 familles.

Sur ces deux exemples, on trouve, en plus, le réseau conjugué permanent formé de méridiens et parallèles : j'ai étudié en détail ces exemples [21].

Comme autre exemple intéressant, il y a à signaler les surfaces tétraédrales

$$\alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1,$$

où α, β, γ sont constants; chacune admet ∞^2 courbes définies par l'équation

$$u x^{\frac{2}{3}} + v y^{\frac{2}{3}} + w z^{\frac{2}{3}} = 0$$

et l'on peut les répartir, comme j'ai expliqué plus haut, en ∞^1 familles formant un réseau conjugué permanent.

On constate aisément que la détermination des surfaces admettant un réseau conjugué permanent revient, en se bornant à la troisième classe indiquée plus haut, à l'intégration du système

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log\left[\frac{\mathrm{K}(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}{\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}}\right] = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix},\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log\left[\frac{\mathrm{K}(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}\right] = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},\\
&\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{4(u+v)^2}.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Les lignes de coordonnées (u, v) forment alors le réseau permanent; les surfaces (ou ds^2) ainsi obtenus dépendent de six fonctions irréductibles d'une variable : la solution la plus étendue connue jusqu'ici est celle qu'a signalée M. Goursat, où le réseau conjugué comprend une famille de lignes de niveau; cet exemple fait intervenir trois fonctions d'une variable. Il y aurait lieu de traiter plus à fond ce sujet. Le lecteur est prié de se reporter à la Note additive.

12. Déformation des quadriques. Résultats de M. Bianchi. — Soit

une surface S qui se déforme, au sens de Gauss, en entraînant avec elle un trièdre trirectangle T_M attaché intrinsèquement à chaque point M de S; on peut concevoir un élément géométrique E_M (point, surface, courbe, congruence, ...), correspondant à chaque point M de S et attaché invariablement au trièdre T_M; quand S a pris la configuration S_1, le trièdre T_M a pris la position $(T_M)_1$ et E_M la position $(E_M)_1$. D'autre part, l'*élément de contact*, tel que Sophus Lie l'imagine, comprend un plan, que nous appellerons *facette* et un point que nous appellerons *centre*. Cela posé, soit une surface S à courbure totale constante -1; traçons dans chaque plan tangent à S un cercle C de rayon constant $\sin\alpha$ ayant pour centre le point M de contact; sur C prenons un point M' arbitraire, qui est centre d'une facette contenant la droite MM' et inclinée de l'angle α sur le plan tangent en M à S; nous obtenons ainsi ∞^1 facettes correspondant à M, puis, en faisant varier M sur S un total de ∞^3 facettes.

Or, si l'on considère un système de ∞^1 surfaces, chaque surface fournit ∞^2 éléments de contact et le système des ∞^1 surfaces donne ∞^3 éléments de contact : la réciproque n'est pas vraie; étant donnés, *a priori*, ∞^3 éléments de contact, appelons *stratification*, d'après l'usage italien, l'opération qui consiste à répartir ces ∞^3 facettes le long de ∞^1 surfaces dont elles constituent les plans tangents, le centre de chaque facette étant le point de contact; ∞^3 *éléments de contact donnés*, a priori, *ne peuvent, en général, être stratifiés*, car, en cherchant à extraire de ces ∞^3 éléments une série ∞^2 relative à une surface S, on obtient une équation aux différentielles totales du premier ordre, qui, en général, est impossible, on n'admet qu'un nombre fini de solutions, mais dans certains cas favorables, on peut obtenir ∞^1 surfaces.

On constate que pour la surface S et les ∞^3 facettes définies plus haut, la condition d'intégrabilité illimitée est réalisée, et l'on obtient ∞^1 surfaces S' précisément de même courbure totale constante, -1, que S; la correspondance (M, M') entre S et une des nouvelles surfaces S' est le premier exemple de transformation de Bäcklund, obtenu en 1881 par Bäcklund, tandis qu'en 1879 M. Bianchi n'avait obtenu que la transformation *complémentaire*, relative à $\alpha = \frac{\pi}{2}$; dans ce cas, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la congruence MM' est une congruence de normales, la surface Σ normale aux droites étant une surface W définie par

$R - R' =$ const. D'autre part, que α soit égal ou non à $\frac{\pi}{2}$, sur S et S' les asymptotiques se correspondent; si S se déforme autour d'une asymptotique $\mathcal{A}$ restant rigide, S' se déforme autour de l'asymptotique correspondante $\mathcal{A}'$ restant rigide aussi, de sorte que la transformation équivaut ainsi à une transformation de courbes et non plus de surfaces; ici, les courbes sont à torsion constante et cette transformation avait été signalée dès 1879 par Sophus Lie [38]; ceci a d'ailleurs été l'origine de la belle *transformation asymptotique* des courbes que M. Bianchi a imaginée. En faisant varier α, on obtient ∞^2 surfaces S' déduites de S par ∞^1 équations de Riccati.

On peut dire que S' est *une* transformée de S sous l'angle α et écrire $S' = S\alpha$ et inversement $S = S'\alpha$ (le symbole $S\alpha$ ne définit pas une seule surface, mais ∞^1). S et α étant donnés, choisissons S' et déduisons de S' une surface $S'\beta$ ou S''; on écrira donc *schématiquement*

$$S'' = S'\beta = S\alpha\beta.$$

on démontre qu'il existe *une* transformée et *une seule* $S\beta$ telle que S' soit une transformée $(S\beta)\alpha$; dans le cycle S, $S\alpha$, $S\alpha\beta$, $S\beta$, S, chacune des quatre surfaces est alternativement transformée de la précédente sous l'angle α, puis β et le quadrilatère gauche $MM_\alpha M_{\alpha\beta} M_\beta$, quand M décrit S, se déforme, de sorte que ses côtés et ses dièdres restent constants, les côtés restant tangents à un couple de deux surfaces, les plans de deux côtés concourants étant tangents à une même surface. Par n transformations successives $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on obtient ainsi 2^n surfaces offrant une configuration curieuse; si l'on prend deux surfaces S et $S\alpha$ les équations de Riccati relatives à S et β ou $S\alpha$ et β sont équivalentes l'une à l'autre, précisément en vertu du théorème de permutabilité. Si S se déforme en une autre surface $\overline{S}$, les ∞^3 facettes relatives à S et α deviennent les facettes de même définition relatives à $\overline{S}$, mais la loi de stratification a changé en passant de S à $\overline{S}$; en particulier, si $\overline{S}$ est la sphère de rayon i, les ∞^3 facettes de $\overline{S}$ offrent une configuration exceptionnelle où les ∞^1 surfaces de stratification sont réduites chacune à l'une des ∞^1 génératrices de l'un ou l'autre système de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + \cos^2\alpha = 0,$$

concentrique à $\overline{S}$, le plan de la facette tournant autour de la génératrice, de sorte que chaque génératrice donne ∞^2 éléments de contact.

Généralisons maintenant : soient une quadrique Q, réelle ou imaginaire, puis une quadrique Q_1 du système homofocal à Q ; le choix de Q_1 constitue un premier paramètre arbitraire. La facette f, ayant pour centre un point M de Q, tangente en M à Q, coupe Q_1 suivant une conique C réelle ou imaginaire ; à chaque facette f correspondent ∞^1 facettes f_1, dont le centre M_1 est sur C, dont le plan est déterminé par MM_1 et l'une des génératrices de Q_1 issue de M_1. Les ∞^3 facettes f_1 forment un ensemble stratifiable, les surfaces de stratification se réduisant comme plus haut à une génératrice du système choisi sur Q_1. Si l'on imagine que la quadrique Q, flexible et inextensible, se déforme en entraînant avec elle les facettes f_1, pour toute configuration S de Q, les ∞^3 facettes f_1 ne cessent de former un système stratifiable, et les surfaces correspondantes S_1 sont toutes applicables elles aussi sur Q : S_1 s'obtient par une équation de Riccati qui introduit une seconde constante arbitraire ; chaque conique C est coupée par quatre surfaces S_1 en quatre points de rapport anharmonique constant ; les foyers F et F_1 des facettes associées f et f_1 tangentes à S et S_1 engendrent une congruence rectiligne FF_1, dont les nappes focales sont S et S_1, les asymptotiques se correspondant sur S et S_1. Quand S se déforme de façon à venir s'appliquer sur Q, F vient en M, F_1 vient en un point M_1 de Q_1 ; or, dans l'affinité d'Ivory, le point M_1 de Q_1 correspond à un point $\overline{M}$ de Q ; si l'on applique S_1 sur Q, l'homologue de F_1 dans l'applicabilité est le point $\overline{M}$.

Quand on laisse fixe le paramètre λ qui individualise Q_1 dans le système homofocal à Q, on obtient pour S, ∞^1 déformées dont l'une peut être représentée par $S\lambda$; de même, de $S\lambda$ on déduit $(S\lambda)\lambda_1$ ou $S\lambda\lambda_1$; on démontre qu'il existe *une* surface et *une seule* $S\lambda_1$ telle que $S\lambda\lambda_1$ soit aussi définie comme $(S\lambda_1)\lambda$, ce qui est l'analogue de la propriété déjà démontrée pour la sphère.

Je ne puis citer toutes les propriétés élégantes rencontrées dans cette théorie. Je me contente, pour amener transition avec les propriétés établies au Chapitre suivant, de signaler que ceci s'applique non seulement aux quadriques réelles, mais encore aux quadriques soit imaginaires et d'équation réelle, soit d'équation imaginaire ; pour les trois types, on peut obtenir des déformées *réelles* et il se produit

un fait très remarquable : supposons S et S_1 réelles toutes deux. Il est naturel, au moins au premier abord, d'imaginer que la correspondance d'applicabilité (M, F) entre Q et S est une correspondance de point réel à point réel et que la correspondance (F, F_1), qui n'est pas une applicabilité, est aussi correspondance de point réel à point réel; cette dernière condition exige d'abord que le plan tangent à Q en M coupe Q_1 suivant une conique C réelle; comme la facette f_1 tangente à S_1 en F_1 est réelle et vient recouvrir une facette tangente à Q_1, il est nécessaire que la quadrique Q_1 soit *réglée;* cela posé, l'applicabilité de Q et S_1 relie F et $\overline{M}$; M_1 et $\overline{M}$ ne sont réels ensemble que si, dans la famille homofocale étudiée Q et Q_1 sont *réglées toutes deux;* on constate donc qu'à toute quadrique réelle Q, à points elliptiques, on peut faire correspondre une déformée réelle S correspondant à Q point réel pour point réel, mais que les ∞^2 surfaces réelles S_1 déduites de S par la méthode exposée ici correspondent, dans leur applicabilité, à Q ou S *point réel pour point imaginaire.* M. Bianchi emploie l'expression *application idéale* pour ce genre, singulier au premier abord, d'applicabilité. Peterson, dont les travaux sont malheureusement restés longtemps ignorés, est le premier géomètre qui ait signalé ce genre d'applicabilité, que j'étudierai systématiquement au Chapitre suivant.

Nous avons vu plus haut comment une théorie semblable peut être développée pour d'autres ds^2 et l'intérêt qu'il y aurait, non pas tant à développer cette théorie sur un exemple déterminé, mais plutôt à classer tous les ds^2 auxquels cette théorie s'applique.

Je ne dois pas oublier de citer le nom du géomètre français Guichard dont les résultats sont toutefois plus difficiles à percevoir, les méthodes étant empruntées à la théorie des espaces à plus de trois dimensions [29].

13. **Déformation infiniment petite.** — Si nous imaginons une série de surfaces toutes applicables entre elles, dépendant d'un paramètre t se déformant d'une façon continue quand t varie lui-même d'une façon continue, on peut concevoir que l'on suive les trajectoires des divers points (u, v) de la surface initiale S_0 obtenue pour $t = 0$ et que l'on écrive pour la surface S_t

$$(1) \qquad \begin{cases} X = x + t x_1 + t^2 x_2 + \ldots, \\ Y = y + t y_1 + t^2 y_2 + \ldots, \\ Z = z + t z_1 + t^2 z^2 + \ldots, \end{cases}$$

où les x_i, y_i, z_i sont indépendants de t, mais fonctions de u, e telles que l'on ait identiquement

$$(2) \qquad dX^2+dY^2+dZ^2 = dx^2+dy^2+dz^2.$$

Cela donne les équations successives

$$(3) \qquad \begin{cases} dx\,dx_1+dy\,dy_1+dz\,dz_1 = 0, \\ dx\,dx_2+dy\,dy_2+dz\,dz_2+\frac{1}{2}(dx_1^2+dy_1^2+dz_1^2) = 0, \\ dx\,dx_3+dy\,dy_3+dz\,dz_3+dx_1\,dx_2+dy_1\,dy_2+dz_1\,dz_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

qui permettent, de proche en proche, de déterminer les x_i, y_i, z_i. Si l'on se borne à la première équation, on obtient l'*équation de la déformation infiniment petite de la surface* S. D'après Cauchy, si l'on sait trouver la solution *générale* de ce problème (*homogène*), on sait obtenir *par de simples quadratures* la solution de chacune des équations suivantes qui correspondent au même problème *non homogène*.

Darboux a fait constater que si l'on pose

$$(4) \qquad X = x + x_1, \qquad X_1 = x - x_1, \qquad Y = \dots,$$

l'équation de la déformation infiniment petite de S revient à l'équation

$$(5) \qquad dX^2+dY^2+dZ^2 = dX_1^2+dY_1^2+dZ_1^2,$$

qui fait connaître un couple de surfaces applicables et réciproquement.

Le fait que les asymptotiques sont les caractéristiques de l'équation de Monge-Ampère de la déformation de S entraîne qu'il y a avantage à rapporter S à ses asymptotiques réelles ou imaginaires; S est alors représentée par les formules de Lelieuvre

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \int \left(\theta_2 \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} - \theta_3 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta} - \theta_3 \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right) d\beta, \\ y = \int \left(\theta_3 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} - \theta_1 \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} - \theta_1 \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right) d\beta, \\ z = \int \left(\theta_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} - \theta_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta} - \theta_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right) d\beta, \end{cases}$$

où θ_1, θ_2, θ_3 sont des solutions d'une même équation aux dérivées

partielles

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = k\theta,$$

et sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à la surface S. La surface S_1 la plus générale s'obtient en cherchant la solution la plus générale, ω, de (7) et écrivant

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 = \int \left(\theta_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ y_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

y_1 et z_1 se déduisant de x_1 en remplaçant θ_1 par θ_2, puis θ_3.

Je ne puis entrer ici dans la belle théorie des douze surfaces imaginée à ce propos par Darboux [17]; mais je signale simplement ce fait que θ_1, θ_2, θ_3, ω étant solutions d'une même équation de Laplace, le plan d'équation

$$(9) \qquad \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \omega = 0$$

enveloppe une surface A_1 (avec les notations de Darboux) où le réseau α, β est conjugué et telle que S et A_1 se correspondent par plans tangents parallèles. C'est cette surface que M. Bianchi appelle *associée* de S dans la déformation infiniment petite qui fait correspondre S_1 à S : la relation entre S et S_1 est évidemment *réciproque*; on voit aisément que la relation entre S et A_1 est *réciproque* aussi; au réseau asymptotique (α, β) de S correspond sur A_1 un réseau conjugué tel que la tangente à la courbe α sur A_1 est parallèle à la tangente asymptotique β de S; de même, aux asymptotiques de A_1 correspond sur S un réseau conjugué, dont les tangentes sont, dans leur ensemble, parallèles à celles des asymptotiques de A_1, avec échange comme plus haut. C'est cette correspondance (S, A_1) que nous avons rencontrée plus haut dans l'étude des réseaux conjugués permanents au cours d'une déformation; si S a sa courbure totale de la forme

$$K = \frac{-1}{[\varphi(\alpha) + \psi(\beta)]^2}$$

avec les notations de ce paragraphe, A_1 admet une déformation continue où le réseau α, β reste conjugué, tandis que S éprouve une

altération qui n'est pas une déformation, altération qui conserve les asymptotiques.

Weingarten a, de son côté, trouvé cette surface A_1 par une méthode légèrement différente. Les fonctions x_1, y_1, z_1 à déterminer satisfont aux équations simultanées

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}=0, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}=0,\\ &\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}+\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}=0. \end{aligned}\right.$$

On introduit l'invariant du système des deux formes

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\,d\alpha^2+2\mathrm{F}\,d\alpha\,d\beta+\mathrm{G}\,d\beta^2=ds^2,\\ &\mathrm{S}x_1\,dx=\left(\mathrm{S}x_1\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)d\alpha+\left(\mathrm{S}x_1\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)d\beta, \end{aligned}\right.$$

soit φ, *fonction caractéristique de déformation*

$$(11)\quad \varphi=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\mathrm{S}x_1\frac{\partial x}{\partial \alpha}-\frac{\partial}{\partial \alpha}\mathrm{S}x_1\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)=\frac{1}{2\mathrm{H}}\mathrm{S}\frac{\mathrm{D}(x,x_1)}{\mathrm{D}(\alpha,\beta)}.$$

La fonction φ est déterminée par l'équation linéaire

$$(12)\quad \frac{1}{\mathrm{H}}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\delta''\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}-\delta'\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}}{\mathrm{KH}}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\delta\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}-\delta'\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}}{\mathrm{KH}}\right)\right]=\frac{2\mathrm{F}\delta'-\mathrm{E}\delta''-\mathrm{G}\delta}{\mathrm{H}^2}\varphi,$$

puis c, c', c'' étant les cosinus directeurs de la normale à S, on aura

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}&=\frac{\left(\delta\frac{\partial c}{\partial \beta}-\delta'\frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)\varphi-\left(\delta\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}-\delta'\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)c}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}},\\ \frac{\partial x_1}{\partial \beta}&=\frac{-\left(\delta''\frac{\partial c}{\partial \alpha}-\delta'\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)\varphi+\left(\delta''\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}-\delta'\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)c}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \end{aligned}\right.$$

et formules analogues pour y_1, z_1, de sorte que la méthode de Weingarten, comme celle de Darboux, conduit à une équation aux dérivées partielles, linéaire et du second ordre, suivie de trois quadratures de différentielle totale. La méthode de Darboux a l'avantage d'offrir une équation aux dérivées partielles de forme plus simple; elle a, par contre, l'inconvénient de supposer la surface préalablement

rapportée à ses asymptotiques, tandis que la méthode de Weingarten s'achève en coordonnées curvilignes quelconques. C'est donc une question d'opportunité, qui, dans les applications, conduit à adopter l'une ou l'autre.

A signaler que M. H. Weyl a utilisé la généralisation de la méthode de Weingarten pour étudier le problème analogue où le ds^2 lui-même subit une variation infiniment petite. A ce point de vue il est bon de remarquer que la méthode de Weingarten revient à avoir dédoublé la troisième équation (9) en la réunion des deux équations

$$(14) \qquad \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = \mathrm{H}\varphi, \qquad \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = -\mathrm{H}\varphi.$$

Il est important de signaler que le problème de la déformation infiniment petite dépend, linéairement, pour une surface donnée, de deux fonctions arbitraires d'une variable. De la sorte, pour une surface réglée, la déformation *finie* de la surface en surface réglée encore, dépendant explicitement d'une fonction arbitraire, on en déduit, par un calcul simple, une solution explicite avec une fonction arbitraire de l'équation résolvante de la déformation infiniment petite; si donc il s'agit d'une quadrique, même si l'on ne sait pas déformer complètement la surface, on sait intégrer complètement le problème de la déformation infiniment petite, puisqu'il suffit de réunir les deux séries de déformation offertes par les deux systèmes de génératrices; cette simple remarque, due à Darboux, permet de prévoir, *a priori*, pourquoi les recherches de M. Bianchi sur les quadriques ne pouvaient manquer d'aboutir à des résultats élégants; il reste, dans cet ordre d'idées, à étudier toutes les surfaces pour lesquelles on sait résoudre explicitement le problème de la déformation infiniment petite; c'est alors qu'il est indispensable de suivre la méthode de Darboux et l'on est ramené au problème complètement traité par Darboux au Tome II de la *Théorie des surfaces :* trouver toutes les formes de $k(\alpha, \beta)$ pour lesquelles l'équation (7) s'intègre explicitement; Darboux a même montré que cela permet un premier progrès dans la détermination des surfaces que l'on sait complètement déformer.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE LA DÉFORMATION DU POINT DE VUE FINI.

1. Applicabilité de surfaces réelles par régions réelles ou imaginaires. — Deux surfaces réelles S et S_1 étant soit applicables, soit isométriques, il existe entre elles un certain nombre (fini ou infini) de correspondances ponctuelles assurant l'isométrie; nous en choisissons *une* bien déterminée. Trois cas peuvent se présenter :

1° Un point M de S a, quelle que soit sa position sur S, un homologue réel M_1 sur S_1; exemple : deux surfaces minima associées S et S_1, et dans ce cas, réciproquement, S_1 a même propriété que S; autre exemple : S est une surface de révolution arbitraire et S_1 une déformée révolutive obtenue en multipliant le rayon de chaque parallèle de S par une constante $a < 1$, et dans ce cas, il peut arriver qu'à un point de S_1 ne corresponde pas un point réel de S;

2° Un point M de S a, suivant sa position, un homologue M_1 sur S_1, réel ou imaginaire; exemple : surface développable et plan ou deux surfaces de révolution;

3° Un point réel M de S a toujours un homologue M_1 imaginaire sur S_1; nous avons reconnu au Chapitre précédent que toute quadrique Q non réglée possède des déformées de cette espèce.

J'ai établi au *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1920 et 1921, t. 44 et 45 [22], les résultats suivants (il ne s'agit ici que d'une nappe simplement connexe, de sorte que pour un hyperboloïde à deux nappes, nous ne nous occuperions que de l'une des deux nappes). La surface S est supposée séparée en deux régions S′ et S″ séparées par une courbe C; la région S′ correspond point réel pour point réel à la surface S_1 (ou à une fraction de S_1); la courbe C a pour homologue la courbe C_1 de S_1; enfin, la région réelle S″ de S est telle qu'à chaque point de S″ correspond un point imaginaire de S_1; alors, ou bien la surface S_1 se compose de deux portions $S_1^{(1)}$ et $S_1^{(2)}$ *isomé-*

triques entre elles, séparées par C_1, et cette courbe est arête de rebroussement de S_1 et en même temps asymptotique singulière de S_1; le rayon de courbure de C_1 est en chaque point égal au rayon de courbure géodésique de C sur S, le rayon de torsion de C_1 est différent de la quantité $\pm\sqrt{-RR'}$, où R et R' sont les rayons de courbure principaux de S; ou bien la surface S_1 admet la ligne C_1 pour ligne d'arrêt, toujours asymptotique singulière, avec mêmes circonstances pour la courbure et la torsion.

Si donc, nous nous bornons au cas de C_1 ligne de rebroussement, chaque point M de S a *deux* homologues sur S_1, réels si M est dans S', imaginaires conjugués si M est dans S''. Il est intéressant de traiter en détail le problème suivant : On se donne sur une surface réelle une courbe C; on construit une courbe C_1, réelle, définie intrinsèquement par sa courbure et sa torsion, définies comme plus haut $\left(\text{la torsion étant différente de } \pm\sqrt{\frac{-1}{RR'}}\right)$: existe-t-il une déformée réelle S_1 de S admettant C_1 comme asymptotique singulière (ligne d'arrêt ou de rebroussement)? Quelle est celle des deux régions, limitées sur S par C, qui est recouverte par S_1? Dans mes travaux cités plus haut, j'ai soumis cette question à la méthode *expérimentale*. Depuis la publication du fascicule précédent, M. Goursat vient de résoudre la question en deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [28 *bis*] et une nouvelle Note de M. Goursat est en préparation.

Pour l'intelligence de ce qui suit, le lecteur est prié de se reporter au Chapitre III du fascicule précédent (§ 5, p. 25-29).

Nous partons d'une surface S et d'une courbe C *arbitraire* tracée sur S; il s'agit de déformer S de façon que C prenne une configuration donnée à l'avance, Γ, *en se bornant au cas singulier où la courbure de* Γ *est égale à la courbure géodésique de* C *sur* S. Les coordonnées courantes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ du point de la surface inconnue Σ sont intégrales de l'équation de Monge-Ampère déjà écrite, où ξ est l'inconnue.

$$(1)\qquad \xi_{11}\xi_{22}-\xi_{12}^2=K(EG-F^2)(1-\Delta\xi).$$

Nous avons vu comment on a aussitôt, pour $v=0$, les dérivées

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},\ \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v},\ \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$$

(la courbe C a pour équation $v = 0$, le système tracé sur S est orthogonal, $F \equiv 0$, $E(u, 0) \equiv 1$; c, c', c'' sont les cosinus directeurs le long de C_1 ou Γ de la surface Σ déformée de S). La difficulté ne commence qu'en essayant d'obtenir les dérivées, pour $v = 0$,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \tag{3}$$

L'équation (1) donne, *par de simples substitutions*, avant d'avoir fait la moindre division,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} c\,\frac{\cos\theta}{R}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\alpha - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial v}(\beta\sin\theta - \gamma\cos\theta)\right] &= G c^2\left[K + \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2\right], \\ c'\,\frac{\cos\theta}{R}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\alpha' - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial v}(\beta'\sin\theta - \gamma'\cos\theta)\right] &= G c'^2\left[K + \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2\right], \\ c''\,\frac{\cos\theta}{R}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\alpha'' - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial v}(\beta''\sin\theta - \gamma''\cos\theta)\right] &= G c''^2\left[K + \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2\right], \end{aligned} \right.$$

équations où G, $\frac{\partial G}{\partial u}$, $\frac{\partial G}{\partial v}$, K sont calculés en y faisant ensuite $v = 0$. On remarque que si, par un moyen quelconque, l'une des trois fonctions inconnues $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ a été obtenue, la condition

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 - dx^2 = dy^2 + dz^2$$

fournit les deux solutions associées y, z par de simples quadratures, avec des constantes négligeables (déplacement ou symétrie); de sorte que si cette première solution contient ou ne contient pas de constantes arbitraires, la surface Σ contient le même nombre d'arbitraires; d'autre part, cette première solution x peut être *holomorphe* sans qu'il en soit de même pour y et z, après les quadratures à effectuer : c'est là qu'il est utile de regarder l'ensemble des équations (4) et non une seule, à la fois pour décider du nombre éventuel de constantes ou de l'holomorphie; nous ne nous occupons que du cas *singulier* où la courbure de Γ est égale à la courbure géodésique de C sur S.

Or c, c', c'' ne peuvent être nuls tous trois; si c est nul tout le long de Γ, comme le plan osculateur de Γ est tangent à Σ, on en conclut que le plan osculateur de Γ est toujours parallèle à Ox, donc que Γ est ou une droite parallèle à Ox, ou une courbe plane dont le plan est parallèle à Ox; prenons ce plan pour plan $z = 0$, de sorte

que $c = c' = 0$, $c'' = 1$. Dans ce cas la dernière équation (4) montre que, $\frac{\cos\theta}{R}$ étant nul, et θ égal à $\frac{\pi}{2}$, si $K + \frac{1}{T^2} \neq 0$, c'est-à-dire si la courbure totale de la surface n'est pas nulle, car $\frac{1}{T} = 0$, z n'est pas holomorphe; les deux premières ne déterminent plus $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$ et l'étude directe faite par M. Goursat montre qu'alors x, y sont holomorphes, tandis que z ordonné suivant les puissances de v est de la forme

$$(5) \qquad z = v^{\frac{3}{2}}[f_0 + v f_1 + \ldots],$$

f_0, f_1, ... dépendant de u; on a une surface Σ, sans constante, admettant la courbe plane Σ comme arête de rebroussement et le plan $z = 0$ pour plan de symétrie; ce cas correspond à ce fait que la courbe Γ, réunie au plan $z = 0$ tangent à Σ en tous les points de Γ, fournit une *caractéristique double* de l'équation (1), l'équation (1) jouissant de plus de cette propriété que tous les éléments des caractéristiques doubles $\left[\xi(u, v), \frac{\partial\xi}{\partial u}, \frac{\partial\xi}{\partial v}\right]$ satisfont à l'équation du premier ordre

$$(6) \qquad \Delta\xi - 1 = 0$$

dont dépend la recherche des courbes parallèles géodésiquement et dont toutes les intégrales appartiennent à (1) (ce qui précède suppose Γ plane, mais non rectiligne).

Si la courbe Γ n'est pas plane, on a $\frac{\cos\theta}{R} = 0$ en vertu du choix de Γ; c, c', c'' sont tous trois différents de zéro et alors chaque équation (4) montre que $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ sont toutes trois infinies; la surface Σ, si $K + \frac{1}{T^2} \neq 0$, admet bien Γ pour arête de rebroussement; elle ne contient aucune constante arbitraire; Σ recouvre S en double sur la région de convexité ou concavité géodésique suivant que $K + \frac{1}{T^2}$ est positif ou négatif. La courbe Γ, avec l'ensemble de ses plans osculateurs, n'est plus une caractéristique double de l'équation (1); au point de vue géométrique il n'y a pas une différence essentielle entre ce cas où Γ est gauche et celui où Γ est plane; une certaine transformation de contact sur l'équation (1) la transforme en une

autre équation de Monge-Ampère en permettant de ramener l'un à l'autre les deux cas.

Si $K + \frac{1}{T^2} = 0$, Γ devient asymptotique régulière et l'on a une déformation de S dépendant d'une fonction arbitraire : Σ recouvre S, de part et d'autre de C, *si toutefois* Σ *est réelle* (*voir* Chap. I, § 2).

Le cas où la courbe C est *géodésique* a besoin d'une étude spéciale; si Γ n'est pas rectiligne, il n'y a rien à dire; on est dans le cas normal de déformation, on obtient deux surfaces régulières. Si Γ devient rectiligne, il y a divers cas bien distincts qui peuvent se présenter : la courbe Γ est une singularité ou algébrique, ou transcendante de Σ; dans ce dernier cas Σ s'enroule asymptotiquement autour de cette droite Γ. L'exemple donné au Chapitre I, paragraphe 2, fournit précisément (pour $h = U_0$, m quelconque) ∞^1 hélicoïdes s'enroulant asymptotiquement autour de la droite déformée du parallèle géodésique. Peterson a montré la même circonstance pour l'ellipsoïde et une section principale; les formules

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{y^2 + z^2} &= \sqrt{B^2 - C^2} \sin q \cos p, \\ \frac{y}{z} &= \operatorname{tang}\left[\frac{C}{\sqrt{B^2 - C^2}} \log \operatorname{tang} \frac{q}{2} \right], \\ x &= \int \sqrt{A^2 \cos^2 p + C^2 \sin^2 p}\, dp, \end{aligned} \right.$$

où $B > C > 0$, donnent une surface applicable sur l'ellipsoïde

$$(8) \qquad X = A \sin p, \qquad Y = B \cos p \sin q, \qquad Z = C \cos p \cos q.$$

Ce qui précède conduit à un résultat fort simple : si S est une surface réelle qui n'admet pas d'asymptotique singulière (ligne d'arrêt ou de rebroussement), et si l'on considère une déformée réelle S_1 de S correspondant à S par points réels, dans l'applicabilité S recouvre nécessairement S_1 *complètement;* elle peut, réciproquement, être recouverte totalement par S_1, de sorte que S_1 n'aura pas non plus d'arête de rebroussement; elle peut, au contraire, n'être recouverte que partiellement par S_1. La sphère, l'ellipsoïde, le tore (que l'axe coupe ou non le cercle méridien), une quadrique quelconque donnent des exemples simples de surfaces auxquelles s'applique cette proposition; une telle surface représente d'une façon parfaite son ds^2, ou du moins *une région* du ds^2, au sens qui va être défini.

2. Régions d'un ds^2. Correspondances de point réel à point imaginaire. — Supposons que la surface réelle S ait une déformée réelle S_1, tel que tout point réel M de S ait pour homologue un point imaginaire M_1 de S_1 ; il est clair que, réciproquement, tout point réel de S_1 a pour homologue un point imaginaire de S. Si les surfaces S et S_1 sont *analytiques*, on voit aussitôt que chaque point M de S (réel ou imaginaire) doit avoir sur S un homologue $\overline{M}$ (réel ou imaginaire en même temps que M), tel que la correspondance $M\overline{M}$ soit une autre application de S; la propriété ne peut donc appartenir qu'à des surfaces auto-applicables. Supposons donc qu'un ds^2

$$(1) \qquad ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2$$

admette une auto-transformation

$$(2) \qquad u = f(u', v'), \qquad v = \varphi(u', v'),$$

c'est-à-dire qu'en vertu de (2) on aura *identiquement*

$$(3) \quad E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2 \equiv E(u', v')\,du'^2 + \ldots.$$

Or, on sait (fascicule précédent, Chapitre III) trouver, lorsqu'elles existent, les transformations de cette espèce (2). Ainsi, pour la quadrique

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0,$$

l'emploi des variables x, y donnerait les transformations $x = \varepsilon x'$, $y = \varepsilon_1 y'$ où ε et ε_1 désignent ± 1 ; un autre motif d'auto-application est, dans ce cas, que z n'est pas une fonction uniforme de x et y. Donc, dans le cas général, les diverses déterminations (x, y, z) correspondant à un même couple (u, v) donnent une auto-application. En écartant provisoirement les ds^2 de révolution, nous pourrons trouver un système de variables canoniques (u, v) telles que tous les points de la surface S qui se correspondent dans les auto-applications soient obtenus par le même couple (u, v), de sorte que ce couple sera nécessairement réel pour les points réels; c'est ainsi que, pour la quadrique précédente, les variables canoniques pourront être choisies :

$$u = x^2 \qquad \text{et} \qquad v = y^2.$$

Le ds^2 *réduit* ainsi obtenu ne possède plus d'auto-transformations;

les deux inégalités $EG - F^2 > 0$, $E > 0$ définissent dans le plan ωuv une ou plusieurs régions où le ds^2 est *défini, positif*; si, par ce procédé, on trouve N régions où $N > 1$, les surfaces réelles correspondant à une même région *peuvent* se correspondre par points réels, mais deux surfaces correspondant à deux régions différentes se correspondent point réel pour point imaginaire. C'est ainsi que, pour la quadrique (4) supposée ellipsoïde réel, $a > b > c > 0$, on a le ds^2 réduit

$$(5)\qquad 4\,ds^2 = du^2\left[\frac{1}{u} + \frac{c}{a^2}\,\frac{1}{1-\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}\right] + dv^2\left[\frac{1}{v} + \frac{c}{b^2}\,\frac{1}{1-\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}\right] + 2\,du\,dv\,\frac{c^2}{ab}\,\frac{1}{\left(1-\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)^2}$$

et les régions sont données par les inégalités

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} uv\left(1-\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)\left(1-\frac{u}{a}-\frac{v}{b}+\frac{cu}{a^2}+\frac{cv}{b^2}\right) > 0, \\ u\left(1-\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)\left(1-\frac{u}{a}-\frac{v}{b}+\frac{cu}{a^2}\right) > 0. \end{array}\right.$$

On obtient ainsi trois régions, donc trois types de surfaces applicables sur l'ellipsoïde réel, conformément aux prévisions de M. Bianchi. La région correspondant aux surfaces réelles, applicables sur l'ellipsoïde, point réel pour point réel, tout au moins pour une partie de l'ellipsoïde, est le triangle limité par ωu, ωv et la droite

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} - 1 = 0;$$

l'ellipsoïde représente huit fois cette région et les frontières de cette région dans le plan ωuv correspondent aux courbes invariantes sur l'ellipsoïde dans une auto-application convenable. Ce dernier résultat est général : les courbes frontières d'une région d'un ds^2 réduit [1] (qu'il y ait *une* ou *plusieurs* régions) correspondent nécessairement soit à un bord des surfaces représentatives, ligne d'arrêt, soit à une courbe invariante dans une auto-application de la surface; d'après les

---

[1] Il s'agit d'une frontière pour laquelle l'élément ds^2 ne soit pas toujours infini; si le ds^2 reste infini, les surfaces représentatives ont toutes une ligne de rebroussement de l'espèce déjà citée.

principes exposés au Chapitre III du fascicule précédent, une courbe invariante dans une auto-application est nécessairement une asymptotique ou une géodésique.

Pour un ds^2 de révolution, la notion de ds^2 réduit ne subsiste que partiellement; on reconnaît ainsi que le paraboloïde de révolution définit *deux* types de surface.

Il faut bien remarquer d'ailleurs qu'un ds^2, réduit ou non, peut toujours, pour les points réels, être écrit avec des variables réelles et que dans toute région où cette forme est définie positive, on peut construire une infinité de surfaces réelles, représentatives d'une certaine portion de la région, proposition aisée à démontrer, mais trop souvent regardée comme évidente.

3. **Isométrie, applicabilité.** — Le mathématicien Voss a, le premier, signalé la différence entre les mots *applicabilité* et *isométrie*. Deux surfaces S et S_1 sont *applicables* l'une sur l'autre si l'on peut trouver une suite continue de surfaces *isométriques* $\Sigma(\lambda)$ dépendant du paramètre λ, telles que $\Sigma(\lambda_0)$ se confonde avec S, $\Sigma(\lambda_1)$ avec S_1, et que, de plus, λ *variant d'une façon continue entre les limites* λ_0 et λ_1, *les positions des divers points de* $\Sigma(\lambda)$ *et les positions des divers plans tangents varient d'une façon continue.*

Nous allons montrer, avec Eugenio Elia Levi [37], que deux surfaces S et S_1, isométriques et de courbure totale *négative*, sont applicables; mais que si S et S_1 sont à courbure totale *positive*, deux cas se produisent, l'un à l'exclusion de l'autre : S_1 est applicable sur S, ou bien S_1 est applicable sur la symétrique de S relativement à un point sans être applicable sur S.

La restriction sur la continuité des plans tangents est essentielle; c'est, d'ailleurs, ici qu'elle est signalée pour la première fois; envisageons, en effet, une surface S quelconque, de courbure totale positive; menons-lui un plan tangent quelconque P que nous déplaçons ensuite parallèlement à lui-même, de façon qu'il partage S en deux régions S′ et S″, S′ d'abord réduite à zéro, puis augmentant d'une façon continue pendant que S″ diminue; remplaçons à chaque moment S′ par sa symétrique $\overline{S'}$ relativement à P; la surface $S'' + \overline{S'}$ est évidemment isométrique à $S'' + S'$ ou S; dans cette déformation de S, les divers points de S subissent un déplacement continu, mais la position du plan tangent varie brusquement pour les points

qu'atteint P; le procédé permet évidemment de remplacer par continuité une portion quelconque de S par la surface symétrique. Le procédé s'applique évidemment encore au cas où S comprend une région à courbure totale négative. Il faut d'ailleurs remarquer que c'est le procédé employé pour quitter un vêtement ajusté, de laine ou soie, (maillot, bas, chaussette) pour éviter une *déformation* (au sens non mathématique), c'est-à-dire pour n'obtenir *qu'une déformation au sens de Gauss*. C'est aussi l'un des procédés employés par M. Lebesgue pour construire des surfaces *isométriques* sur le plan, par exemple, et qui ne sont pas développables, certaines étant réglées, certaines ne l'étant pas et même ne contenant aucun segment de droite [34], [35]. J'ai, de mon côté, étudié certaines surfaces isométriques au paraboloïde de révolution $x^2+y^2=2piz$ en m'inspirant de principes analogues [23]. Dans ce qui suit, on suppose donc que la surface étudiée est définie par points et plans tangents et qu'il y ait continuité au double point de vue ponctuel et tangentiel dans la déformation utilisée, et de plus, continuité aussi sur chaque surface.

Soient une surface S à courbure totale *négative* et une autre surface S_1 isométrique à S; représentons S et S_1 sur le plan ωuv; les asymptotiques issues de deux points correspondants O et O_1 de S et S_1 ont pour image des courbes C et C' pour S, C_1 et C'_1 pour S_1 issues toutes de l'image ω de O et O_1; réciproquement, à deux courbes quelconques Γ, Γ_1 issues de ω, non tangentes en ω, correspond un seul couple de deux surfaces Σ, Σ' isométriques à S et S_1, symétriques l'une de l'autre, admettant pour couple particulier d'asymptotiques les courbes d'images Γ et Γ_1; les asymptotiques C et C_1 peuvent être supposées à torsion positive, C' et C'_1 à torsion négative; si donc nous considérons une courbe $\Gamma(\lambda)$ variant d'une façon continue avec λ, telle que $\Gamma(0)$ et $\Gamma(\infty)$ coïncident respectivement avec C et C_1, et de même une autre courbe $\Gamma'(\lambda)$ telle que $\Gamma'(0)\equiv C'$, $\Gamma'(\infty)\equiv C'_1$, à chaque couple $\Gamma(\lambda)$, $\Gamma'(\lambda)$ correspond une surface $\Sigma(\lambda)$ isométrique à S, se réduisant à S pour $\lambda=0$, à S_1 pour $\lambda=\infty$ et non aux symétriques de S ni S_1, car la torsion de l'asymptotique d'image $\Gamma(\lambda)$ en un point ne peut varier que d'une façon continue; or, au point d'image ω, la torsion ne peut que rester égale à elle-même ou changer de signe : elle est donc constante, et si l'asymptotique d'image $\Gamma(0)$ coïncide avec C, celle d'image $\Gamma(\infty)$ coïncidera avec celle qui a pour image C_1 et non avec une courbe symétrique relati-

vement à un plan. Si maintenant on veut passer de S à la symétrique S'_1 de S relativement à un plan, il suffira de supposer que la courbe $\Gamma(\lambda)$ varie depuis C pour $\lambda = 0$ jusqu'à C'_1 pour $\lambda = \infty$, et Γ depuis C' jusqu'à C_1. Nous avons d'ailleurs déjà rappelé que les familles de surfaces minima associées comprennent des couples de surfaces symétriques.

Prenons maintenant une surface S à courbure totale *positive;* traçons sur S une famille de courbes à un paramètre ne se coupant pas, dont aucune n'est géodésique, dont aucune ne possède d'inflexion géodésique; adoptons sur l'une, C, un sens positif, d'où, par continuité, le sens positif résulte sur les autres. Soient M un point de C, MT la tangente dans le sens positif, Mn la normale principale orientée de M vers le centre de courbure, Mb la binormale telle que le trièdre MTnb ait la disposition du trièdre de référence; le demi-plan limité par Mn et son prolongement et contenant la demi-droite Mb est orienté de Mn vers Mb; la normale MN à la surface S en M peut être réduite à la demi-droite MN située dans ce demi-plan et l'angle (Mn, MN) ou θ, a une valeur bien déterminée comprise entre zéro et π; θ ne peut devenir égal ni à zéro, ni à π sur aucune de nos courbes puisqu'il n'y a pas d'inflexion géodésique; il ne peut devenir égal à $\frac{\pi}{2}$, si nous éliminons les asymptotiques *réelles, mais singulières* que pourrait posséder S; ces courbes, nécessairement isolées, sont celles que nous avons citées au numéro précédent; en chaque point d'une telle courbe D, D', D'' sont infinies, mais $DD'' - D'^2$ reste fini; E. E. Levi, à qui le raisonnement suivi ici est dû, avait oublié cette difficulté, de sorte que je rétablis maintenant la démonstration; nous réduisons donc si c'est nécessaire notre portion de surface de façon à ne plus rencontrer de telle arête de rebroussement. Il est clair maintenant que si S se déforme, au sens de Gauss, d'une façon continue, *ponctuellement et tangentiellement*, l'angle θ reste aigu ou obtus, les deux cas s'excluant; si nous remplaçons S par sa symétrique $\overline{S}$, relativement au plan Mtn, le trièdre Mtnb subsiste, mais la demi-normale MN est remplacée par la demi-droite M$\overline{N}$ symétrique relativement à Mb, de sorte que θ est remplacé par $\pi - \theta$ et que S et $\overline{S}$ sont d'espèce différente: on ne peut passer par continuité d'une surface à courbure positive à une autre surface isométrique d'espèce différente (relativement à l'angle θ), en particulier de S à $\overline{S}$. Il reste à

montrer qu'on peut établir la liaison continue entre deux surfaces de même espèce; en effet, C_1 étant la courbe de S_1 homologue de C, R et R_1 les rayons de courbure, T et T_1 de torsion, correspondants en M et M_1, θ et θ_1 les angles déjà définis en M, on a

$$\frac{\sin\theta}{R} = \frac{\sin\theta_1}{R_1} = \frac{1}{\rho}, \qquad R < \rho, \qquad R_1 < \rho.$$

On détermine une courbe $\Gamma(\lambda)$ par les conditions intrinsèques

$$R(\lambda) = \frac{R + \lambda R_1}{1+\lambda}, \qquad T(\lambda) = \frac{T + \lambda T_1}{1+\lambda},$$

où λ varie de zéro à $+\infty$; Γ varie donc de C jusqu'à C_1 : $R(\lambda)$ étant toujours compris entre R et R_1 est inférieur à ρ, donc $\theta(\lambda)$ est toujours défini d'une façon unique, de genre aigu ou obtus en même temps que θ et θ_1 ; nous avons ainsi obtenu la chaîne $S(\lambda)$ demandée.

On remarque donc que la donnée *a priori* d'une courbe Γ transformée de C définit deux surfaces Σ et $\bar{\Sigma}$; ces deux surfaces sont d'espèce différente, non applicables, simplement isométriques.

De même, quand une surface représentative du ds^2 a une arête de rebroussement du genre étudié au paragraphe précédent, les deux morceaux de Σ qui se raccordent le long de cette arête sont simplement isométriques.

4. **Détermination d'une surface convexe par son ds^2. Résultats de M. H. Weyl.** — Cauchy [15] a démontré la propriété importante : deux polyèdres *convexes* constitués de faces égales et semblablement placées sont égaux ou symétriques; au point de vue de notre étude, leurs surfaces sont applicables. Mais deux polyèdres, dont un seul est convexe, peuvent être composés du même nombre de faces égales deux à deux et semblablement disposées sans être égaux; ainsi, prenons un pentagone régulier convexe ABCDE, et sur la perpendiculaire au plan du pentagone en son centre, deux points S et S_1 arbitraires de part et d'autre du plan; on a ainsi un polyèdre convexe à 10 faces formé de la réunion par leur base de deux pyramides régulières; il existe, d'autre part, un pentagone régulier étoilé $A'B'C'D'E'$ de centre O' tel que $A'B' = AB$; on peut trouver deux points S', S'_1 sur l'axe de ce nouveau pentagone tels que $S'A'B'$ et SAB soient égales, $S'_1A'B'$ et S_1AB aussi : le nouveau polyèdre à 10 faces, formé par la réunion

de ces deux pyramides étoilées, est applicable sur le premier. En tout cas, un polyèdre convexe n'admet pas de déformation *infiniment petite* où le nombre des faces reste le même.

Certains polyèdres non convexes admettent une déformation continue où chaque face reste égale à elle-même; M. Bricard [14] a donné des exemples précis d'octaèdres.

Liebmann [39], Minkowski [41], Hilbert [32], M. Blaschke [10], et finalement M. H. Weyl [49] ont, par leurs efforts successifs, établi le résultat fondamental : *une surface fermée convexe prise dans sa totalité n'admet aucune déformation infiniment petite ;* Hilbert a même ajouté que la *sphère n'admet aucune déformation finie* (dans sa totalité). M. H. Weyl a étendu ce résultat à une *surface fermée convexe quelconque* et donné une généralisation importante; deux surfaces fermées convexes, sans arêtes anguleuses, ni points coniques, étant supposées isométriques, sont nécessairement *égales ou symétriques;* la réciproque de cette dernière proposition est encore plus curieuse : *un ds^2 convexe définit dans l'espace à trois dimensions une surface fermée et une seule* (plus la symétrique).

Il s'agit d'indiquer comment on définit un ds^2 convexe. Une surface fermée convexe ne peut, tout au moins au point de vue de la géométrie projective, être représentée biunivoquement sur le plan; on peut, au contraire, établir une correspondance biunivoque entre elle et toute surface fermée convexe, la sphère, par exemple. En prenant une sphère ayant son centre en un point intérieur à la surface, puis un point de vue P intérieur aux deux surfaces, une demi-droite issue de P réalise une correspondance biunivoque; on peut encore, en donnant à la sphère un rayon suffisamment grand pour envelopper toute la surface S prendre le point où la demi-normale extérieure à la surface coupe la sphère. Les coordonnées (x, y, z) d'un point courant M de S sont des fonctions continues de (c_1, c_2, c_3) coordonnées du point image m de la sphère Σ que nous pouvons réduire à avoir O pour centre avec l'unité pour rayon. On peut donc écrire

$$(1) \quad x = f_1\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \frac{c_2}{\sqrt{}}, \frac{c_3}{\sqrt{}}\right), \qquad y = f_2(\quad), \qquad z = f_3(\quad),$$

de sorte que x, y, z sont devenus fonctions homogènes et de degré zéro des trois variables *indépendantes* (c_1, c_2, c_3) qui peuvent être

multipliées par un facteur arbitraire *positif*. Le ds^2 de la surface (1) peut être écrit

$$(2)\quad \begin{cases} ds^2 = \sum_{i,k} e_{ik}\, dc_i\, dc_k, \qquad e_{ik} = e_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \\ e_{ik} = \dfrac{\partial x}{\partial c_i}\dfrac{\partial x}{\partial c_k} + \dfrac{\partial y}{\partial c_i}\dfrac{\partial y}{\partial c_k} + \dfrac{\partial z}{\partial c_i}\dfrac{\partial z}{\partial c_k}. \end{cases}$$

Les coefficients e_{ik} sont donc homogènes et de degré -2, et l'on a

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{k=3} e_{ik} c_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Réciproquement, toute forme quadratique $\sum_{i,k} e_{ik}\, dc_i\, dc_k$, où les coefficients e_{ik} sont homogènes et de degré -2 et satisfont aux trois égalités (3), peut être regardée comme le ds^2 d'une surface; il suffit, en effet, d'écrire

$$(4)\qquad c_1 = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \qquad c_2 = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \qquad c_3 = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2},$$

ce qui est permis en vertu de l'homogénéité pour convertir la forme en une expression $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ habituelle; on peut reconnaître directement si la forme quadratique est définie positive; il suffit pour cela que l'on ait toujours

$$(5)\qquad \sum_{i,k} e_{ik} X_i X_k > 0$$

pour chaque système X_1, X_2, X_3 qui vérifie

$$(6)\qquad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1, \qquad X_1 c_1 + X_2 c_2 + X_3 c_3 = 0.$$

On peut, sans connaître aucune surface représentative du ds^2, calculer la courbure totale K de cette surface suivant la direction (c_1, c_2, c_3), c'est-à-dire au point d'image (c_1, c_2, c_3); on peut, de même, définir intrinsèquement une courbe par une équation homogène

$$F(c_1, c_2, c_3) = 0$$

et la courbure géodésique de cette courbe en chaque point. Si K est toujours positive, finie, non nulle, nous dirons que le ds^2 est con-

vexe : on suppose les e_{ik} analytiques et holomorphes pour tous les systèmes (c_1, c_2, c_3) non nuls ensemble et réels.

Cela posé, la méthode d'H. Weyl est basée au fond sur le cas particulier où il s'agit de la sphère elle même : Hilbert a donné une démonstration simple de cette propriété : *toute surface fermée de courbure totale constante* $+1$, *sans singularité, se réduit à la sphère;* en effet, si tous les points sont des ombilics, c'est une propriété connue que la surface est une sphère : si tous les points ne sont pas ombilics, il y a contradiction, car au voisinage d'un point M non ombilic, le réseau des lignes (u, v) de courbure forme un système de coordonnées régulier, et l'on a

$$ds^2 = \text{sh}^2\varphi\, du^2 + \text{ch}^2\varphi\, dv^2 \tag{7}$$

avec

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = -\text{sh}\,\varphi\,\text{ch}\,\varphi. \tag{8}$$

Les rayons principaux sont

$$R_1 = \text{th}\,\varphi, \qquad R_2 = \text{cth}\,\varphi. \tag{9}$$

Si la surface n'est pas sphérique, R_1 et R_2 ne restent pas constants ; chacun, suivi par continuité, garde un signe constant, de sorte que R_1, restant compris entre zéro et 1, atteint quelque part en M une valeur *minimum*, donc φ aussi ; ce point M n'est pas ombilic (sinon R_1 serait égal à 1) ; les formules (7) et (8) sont donc valables ; la valeur de φ étant positive, non nulle, on a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \geq 0, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} \geq 0;$$

or, le second membre de (8) est négatif sans égalité : c'est la contradiction annoncée.

M. Blaschke, puis M. H. Weyl ont donné une démonstration simple de la propriété due à Liebmann, que toute *déformation infiniment petite d'une surface fermée sans singularité se réduit à un déplacement solide infiniment petit*, et, somme toute, la proposition d'H. Weyl, que je vais maintenant aborder, est la généralisation de cette propriété à une déformation *finie*.

M. H. Weyl imagine un ds^2 convexe contenant un paramètre

variable τ; il le suppose développable suivant les puissances de τ

$$ds^2 = A + \tau A_1 + \tau^2 A_2 + \ldots, \tag{10}$$

où A, A_1, ... sont des formes quadratiques différentielles, régulières sur toute la sphère; on suppose que S_0 soit une surface fermée *connue*, dont A est le ds^2; H. Weyl montre que l'on peut trouver trois développements convergents

$$\left\{\begin{array}{l} X = x + \tau x_1 + \tau^2 x_2 + \ldots, \\ Y = y + \tau y_1 + \tau^2 y_2 + \ldots, \\ Z = z + \tau z_1 + \tau^2 z_2 + \ldots \end{array}\right. \tag{11}$$

tels que

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = A + \tau A_1 + \ldots, \tag{12}$$

(x, y, z) sont les coordonnées connues du point courant de S_0 et les fonctions inconnues (x_1, y_1, z_1), ..., (x_i, y_i, z_i), ... seront successivement calculées pour tout système (c_1, c_2, c_3). La démonstration comprend deux parties : on a d'abord

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = \frac{A_1}{2}, \tag{13}$$

et c'est cette équation que l'auteur étudie d'abord : le problème *homogène* correspondant est la résolution de

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0. \tag{14}$$

H. Weyl suit la méthode analogue à celle de Weingarten pour la déformation infiniment petite; si l'on pose $(H = \sqrt{EG - F^2})$

$$\left\{\begin{array}{l} S\,dx^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = A, \\ A_1 = \dot{E}\,du^2 + 2\dot{F}\,du\,dv + \dot{G}\,dv^2. \end{array}\right. \tag{15}$$

On introduit une inconnue auxiliaire φ telle que

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{1}{2}(\dot{F} + H\varphi), \qquad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{1}{2}(\dot{F} - H\varphi), \tag{16}$$

et tout est ramené au calcul de φ. Puisque S est soit la sphère, soit une surface fermée convexe, l'équation homogène (14) n'admet d'autre intégrale définie sur toute l'étendue de S_0 que

$$\xi = qz - ry, \qquad \eta = rx - pz, \qquad \zeta = py - qx, \tag{17}$$

où ξ, η, ζ, p, q, r sont des constantes arbitraires ; si l'on connaît *une* solution de (13) (x_1, y_1, z_1) définie sur *toute* la sphère, la solution *générale* sera

$$x_1 + \xi + qz - ry, \quad y_1 + \eta + rx - pz, \quad z_1 + \zeta + py - qx.$$

Il s'agit de faire disparaître les constantes auxiliaires ainsi introduites, qui, finalement, ne servent qu'à remplacer la surface inconnue par une surface d'orientation et position différentes. On peut imprimer une translation convenable (λ, μ, ν) à la surface (X, Y, Z) de sorte que les intégrales étendues à la sphère (c_1, c_2, c_3)

$$(18) \qquad \int X\, d\sigma, \quad \int Y\, d\sigma, \quad \int Z\, d\sigma$$

soient nulles quel que soit τ ; car si elles ne le sont pas, on écrit

$$\int (X - \lambda)\, d\sigma = 0,$$

ce qui donne

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi} \int X\, d\sigma.$$

Un simple changement de notations permet alors de supposer $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, d'où

$$(19) \qquad \int x\, d\sigma = 0, \qquad \int y\, d\sigma = 0, \qquad \int z\, d\sigma = 0.$$

On détermine ξ, η, ζ par les relations

$$(20) \quad \int (x_1 + \xi + qz - ry)\, d\sigma = 0, \qquad \int (y_1 + \ldots) = 0, \qquad \int (z_1 + \ldots) = 0,$$

qui se réduisent à

$$(20') \quad \int (x_1 + \xi)\, d\sigma = 0, \qquad \int (y_1 + \eta)\, d\sigma = 0, \qquad \int (z_1 + \zeta)\, d\sigma = 0.$$

Un nouveau changement de notations permet donc de supposer $\xi = \eta = \zeta = 0$. On détermine ensuite p, q, r par les relations

$$(21) \qquad \int \begin{vmatrix} y_1 + rx - pz & z_1 + py - qz \\ y & z \end{vmatrix} d\sigma = 0$$

ou, si l'on préfère,

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int (y_1 z - y z_1)\, d\sigma + \int [x(px + qy + rz) - p(x^2 + y^2 + z^2)]\, d\sigma = 0, \\ \displaystyle\int (z_1 x - z x_1)\, d\sigma \quad \cdots\cdots = 0, \\ \displaystyle\int (x_1 y - x y_1)\, d\sigma \quad \cdots\cdots = 0. \end{cases}$$

Les trois équations linéaires non homogènes ainsi obtenues en p, q, r ont une solution unique en p, q, r, car les mêmes équations rendues homogènes entraîneraient, en multipliant par p, q, r et ajoutant,

$$\int [(px + qy + rz)^2 - (p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2)]\, d\sigma = 0,$$

égalité qui n'a d'autre solution que $p = q = r = 0$. On a ainsi *normalisé* d'une façon unique la solution x_1, y_1, z_1; on peut montrer, par une méthode analogue à celle qui est suivie pour le problème de la déformation infiniment petite, que l'équation aux différentielles totales (13) se ramène à l'intégration d'une unique équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, du *type elliptique*, parce que la surface (x, y, z) a sa courbure constamment positive, finie, non nulle. Cette équation a une intégrale *unique* définie sur *toute* la sphère, exprimée simplement au moyen d'une fonction auxiliaire analogue à la fonction de Green relative à l'équation de Laplace dans le plan. Ce premier point établi, les fonctions (x_2, y_2, z_2), ..., (x_i, y_i, z_i) s'obtiennent de proche en proche par la même méthode et d'une façon unique; les développements (11) sont convergents moyennant certaines conditions imposées au développement (10).

Supposons maintenant le ds^2, $\Sigma e_{ik}(\tau)\, dc_i\, dc_k$ défini, convexe depuis $\tau = 0$ jusqu'à $\tau = 1$ et la surface S_0 connue; la méthode appliquée comme plus haut depuis $\tau = 0$ jusqu'à $\tau = \tau_1$ $(\tau_1 \leqq 1)$, conduit pour $\tau = \tau_1$ à une surface S_{τ_1} convexe, connue; on répète ensuite en prenant S_{τ_1} comme nouvelle surface initiale, et l'on arrive à une valeur τ_2 $(\tau_1 < \tau_2 \leqq 1)$ avec une surface S_{τ_2} et ainsi de suite; H. Weyl montre que l'application du procédé permet d'arriver à $\tau = 1$, au bout d'un nombre *limité* d'opérations. L'existence d'une solution est ainsi démontrée; pour démontrer l'*unicité*, supposons que S_0 est la sphère et imaginons que pour $\tau = 1$ on obtienne non seulement la surface S_1

du procédé suivi, mais une autre solution $\overline{S_1}$; on peut inversement passer de $\overline{S_1}$ à une surface $\overline{S_0}$ ayant le ds^2 obtenu pour $\tau = 0$; mais alors, nous avons vu directement que $\overline{S_0}$ coïncide avec S_0 convenablement déplacée; donc $\overline{S_1}$ n'est autre chose que S_1 après le déplacement défini par $(S_0 \overline{S_0})$.

Je dois me borner à ces indications assez rapides sur certains points; il serait à désirer que le Mémoire de M. H. Weyl, contenant 33 pages, soit repris et simplifié; l'auteur annonce plusieurs fois dans son Introduction qu'il traitera telle question par telle méthode, et plus loin, ou bien suit une autre méthode, ou se contente de nouveau d'affirmer l'existence de la solution sans produire la démonstration promise.

Ici, il est bien entendu que les surfaces convexes en jeu se composent d'une seule nappe analytique et ne présentent aucune singularité. Il y aurait lieu de généraliser le résultat dans diverses directions; en songeant au théorème de Cauchy, une surface fermée convexe formée de plusieurs morceaux de surfaces analytiques, telle une lentille biconvexe, est probablement indéformable tout comme un polyèdre convexe. Il se peut que la propriété de convexité ne soit pas absolument nécessaire et qu'une surface telle que le tore, dans sa totalité, bien entendu, soit absolument indéformable; il y aurait une question de régularité peut-être plus importante qu'une question de convexité; l'exemple des polyèdres spéciaux de M. Bricard montre qu'il y a là une difficulté pour bien préciser la question de régularité.

D'autre part, la proposition d'H. Weyl ne concerne que des surfaces fermées convexes de courbure totale 4π (*curvatura integra*, comme disent les géomètres allemands). Je dois citer quelques exemples de surfaces convexes de courbure totale 8π et qu'il y aurait lieu d'étudier au point de vue de M. H. Weyl.

Je prends d'abord un cas où la surface se partage en deux morceaux convexes réguliers (tout au moins jusqu'au premier ordre). Prenons dans le plan horizontal un cercle de centre ω et un point O intérieur; par O, menons une sécante OAB limitée aux deux points A et B où elle perce le cercle; sur la perpendiculaire au plan du cercle en O, portons deux longueurs égales $OO_1 = OO_2$ et construisons les deux demi-ellipses pour lesquelles O_1O_2 est un axe complet et OA ou OB l'autre demi-axe. Quand la sécante OA tourne autour de O, la

demi-ellipse O_1AO_2 engendre évidemment une surface fermée convexe régulière; quand on étudie les sections méridiennes de cette surface, on constate qu'en O_1 la courbure des deux demi-ellipses O_1AO_2 et O_1BO_2 sont différentes; en O_1, il y a donc une singularité de la surface, ne se manifestant d'ailleurs qu'à partir du second ordre. Si O se rapproche de ω, la surface tend vers un ellipsoïde. La surface analytique complète comprend évidemment la portion déjà construite et sa symétrique relativement à l'axe O_1OO_2; on a ainsi une surface algébrique de degré 4, admettant O_1 et O_2 pour points doubles où le cône des tangentes se réduit à un plan double; le plan méridien, mené par O perpendiculairement à $O\omega$, donne une ellipse double tracée sur la surface complète. Par exemple, O étant origine, $O\omega$ axe des x, en supposant $O\omega = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $OO_1 = 1$ et le rayon du cercle ω étant $1+\varepsilon$, on aura les équations paramétriques

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= [\varepsilon + (1+\varepsilon)\cos\varphi]\sin\theta = \varepsilon\sin\theta + (1+\varepsilon)c_1,\\ y &= \qquad (1+\varepsilon)\sin\varphi\,\sin\theta = \qquad (1+\varepsilon)c_2,\\ z &= \qquad\qquad \cos\theta = \qquad\qquad c_3.\end{aligned}\right.$$

Pour $\varepsilon = 0$, la surface se réduit à une sphère. On a pour ds^2

$$(24)\quad ds^2 = [1 + 2\varepsilon(1+\varepsilon)(1+\cos\varphi)]\,d\theta^2 - 2\varepsilon(1+\varepsilon)\sin\varphi\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi + (1+\varepsilon)^2\sin^2\theta\,d\varphi^2.$$

La courbure totale a pour expression

$$(25)\qquad \frac{1}{RR'} = \frac{1+\varepsilon(1+\cos\varphi)}{(1+\varepsilon)[\sin^2\theta + \cos^2\theta(1+\varepsilon+\varepsilon\cos\varphi)^2]^2}.$$

On remarque qu'au point O_1 ou O_2 ($\sin\theta = 0$, $\cos\theta = \pm 1$), la courbure totale devient $\dfrac{1}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon+\varepsilon\cos\varphi)^3}$; elle a donc une valeur indéterminée entre $\dfrac{1}{1+\varepsilon}$ et $\dfrac{1}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)^3}$. On remarque que pour avoir toute la surface, il faut faire varier φ de zéro à 2π et θ de zéro à 2π; mais alors la sphère (c_1, c_2, c_3) est balayée *deux* fois; au point de vue de M. H. Weyl, $\sin\theta = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ n'est pas une fonction holomorphe de c_1, c_2, c_3; il faudrait reprendre la méthode pour un exemple de cette sorte et voir les conclusions précises que l'on peut obtenir.

Je cite maintenant un exemple plus compliqué :

La sphère a un ds^2 qui peut recevoir la forme

$$(26) \qquad d\sigma^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](d\xi^2 + d\eta^2),$$

où $p(u \mid \omega, \omega')$ est la fonction classique de Weierstrass : 2ω est la période réelle, $2\omega'$ la période imaginaire pure; on peut obtenir toute la sphère, *une fois*, en faisant varier ξ entre $-\frac{2\omega'}{i}$ et $+\frac{2\omega'}{i}$, et η entre $-\omega$ et $+\omega$; deux points (ξ, η) symétriques par rapport au point $\left(\pm\frac{\omega'}{i}, \pm\omega\right)$ donnent le même point de la sphère. Dans ces conditions, le ds^2 suivant (m, n constantes)

$$(27) \qquad \begin{cases} ds^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)][dx^2 + dy^2], \\ x = \xi + m[p(\omega + i\xi) - e_2]^3, \\ y = \eta + n[p(\omega' + \eta) - e_2]^3 \end{cases}$$

est défini sur toute la sphère prise *deux fois*, car on doit faire varier ici ξ de $-\frac{2\omega'}{i}$ à $+\frac{2\omega'}{i}$ et η de -2ω à $+2\omega$; deux valeurs de ξ, η symétriques par rapport à $\left(\pm\frac{\omega'}{i}, \pm\omega\right)$ ne donnent plus deux points de la surface se correspondant dans une auto-application; il s'agirait de savoir si ce ds^2 (27) définit, *in abstracto*, une surface fermée convexe de courbure totale 8π, ayant quatre points singuliers correspondant à $\xi = \pm\frac{\omega'}{i}$, $\eta = \pm\omega$; la surface se composerait de deux nappes se raccordant aux quatre points singuliers en jeu. Si une telle surface existe, ses géodésiques seraient fermées et à antipodes, du moins sur une certaine fraction de la surface; aux points singuliers que j'ai indiqués, la courbure reste finie et égale à $+1$.

On peut de même construire des surfaces fermées (ou des ds^2) convexes, de courbure totale 12π, 16π, ...

D'autre part, pour revenir à l'analogie des questions traitées ici avec elles relatives aux polyèdres, on voit aussitôt que les surfaces ayant un réseau de G. Kœnigs doublement conjugué [telles qu'un ellipsoïde ou la surface (23)] relatif à une série de plans parallèles et un axe perpendiculaire à ces plans, peuvent être déformées par les formules données au paragraphe précédent de façon qu'une telle surface supposée fermée convexe puisse prendre un nombre fini de configurations encore fermées, mais offrant deux points coniques sur

l'axe; c'est, d'ailleurs, au fond ce qui se présente pour les surfaces de révolution.

J'ajoute enfin que, si dans une surface convexe on fait un trou aussi petit que l'on veut, la portion restante peut, d'après Liebmann, être déformée tout entière.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Backlund. — Om ytor med konstant negativ krökning (*Lunds Universitets Arsskrift*, t. 19, 1883).
2. — *Mathematische Annalen*, t. 17, 1880, p. 285.
3. — *Mathematische Annalen*, t. 19, 1882, p. 387.
4. Bianchi. — *Leçons de Géométrie différentielle*, t. II, 3e édition, p. 266-270.
5. — *Leçons de Géométrie différentielle*, t. II, 3e édition p. 266-409.
6. — *Giornale di Mathematiche*, t. 16, 1878, p. 267.
7. — *Leçons de Géométrie différentielle*, t. I, 3e édition, p. 654.
8. — *Leçons de Géométrie différentielle*, t. II, 3e édition, p. 42.
9. Baroni. — *Giornale di Mathematiche*, t. 28, 1890, p. 349.
10. Blaschke. — *Nachr. der K. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen math.-physik. Kl.*, Sitzung vom 18 mai 1912.
11. Bonnet (Ossian). — *Journal de l'École Polytechnique*. 42e cahier, p. 8-73.
12. — Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (*Journal de l'École Polytechnique*, 42e cahier 1867, p. 77).
13. Bour. — Théorie de la déformation des surfaces (*Journal de l'École Polytechnique*, 39e cahier, p. 82-89).
14. Bricard. — *Journal de Liouville*, 5e série, t. 3, 1897, p. 113-148.
15. Cauchy. — *Journal de l'École Polytechnique*, t. 9, 1813, cahier 16, p. 68-98 et 87-98.
16. Darboux. — *Théorie des Surfaces*. t. IV, p. 162.
17. — *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 48.
18. Gambier. — *Journal de Mathématiques*, t. V, 1926, p. 227-291.
19. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 183, 6 décembre 1926.
20. — *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. 20, 1920.
21. — *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 50, 1926.

22. — *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 44, 1920. et t. 45, 1921.
23. — *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 49, 1921, et t. 50, 1922.
23 *bis*. — *Acta mathematica*, t. 51. 1927, p. 83-131.
23 *ter*. — *Bulletin de la Société mathématique de France*. t. 56. 1928.
24. Gau. — *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 42, 1925, p. 89-141.
25. Gosse. — *Journal de Mathématiques*. t. IV, 1925; *Acta mathematica*. t. 52, 1928; t. 55. 1927. p. 5-39.
26. Goursat. — *Annales de Toulouse*, t. V, 1891.
27. — *Bulletin de la Société mathématique de France*. t. LV. 1927. p. 5.
28. — *American Journal of Mathematics*, t. 15. 1892. p. 1.
28 *bis*. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 186. 1928, p. 272-275 et 665-668.
29. Guichard. — *Mémoires des Savants étrangers*. 2e série. t. 34, 1909.
30. Hazzidakis. — *Journal für Mathematik*. t. 88, 1880, p. 71.
31. — *Journal für Mathematik*, t. 117, 1896, p. 42.
32. Hilbert. — *Grundlagen der Geometrie* (Leibzig, 1909, 3e édition). p. 237.
33. Jonas. — *Mathematische Annalen*, t. 92, 1924. p. 214-257.
34. Lebesgue. — *Annali di Matematica pura ed applicata*. 3e série. t. 7. 1902.
35. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. t. 128, 1899.
36. Lelieuvre. — Darboux, *Théorie des Surfaces*. t. IV. p. 25.
37. Levi (E.-E.). — *Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 1907-1908.
38. Lie (Sophus). — Ueber Flächen deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind (*Archiv für Mathematik og Naturvidenskab*, t. IV, 1879, p. 510).
39. Liebmann. — *Math. Annalen*, t. 53. 1900, p. 81-112; t. 54. 1901, p. 505-517.
40. Minding. — *Journal für Mathematik*. t. 18. 1838, p. 367.
41. Minkowski. — *Math. Annalen*, t. 57. 1903, p. 447-495.
42. Peterson. — *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série. t. V, p. 459.
43. Schwarz. — *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen*. p. 286.
44. — *Journal de Crelle*, t. 80. 1875, p. 280.
45. Servant. — Sur la déformation des surfaces (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 29. 1901, p. 142).
46. Tzitzéica. — Annales de l'Académie Roumaine (*Mémoires de la section des Sciences*, t. 38. 1916. p. 241-258).
47. Voss. — Ueber diejenigen Flächen auf denen geodätische Linien ein konjugiertes System bilden (*Münchener Berichte*. 1888. p. 96).
48. Weingarten. — *Acta mathematica*, t. 20, 1896, p. 159.
49. H. Weyl. — *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, t. 61, 1916, p. 40-72.

Ouvrages à consulter :

DARBOUX. — *Théorie des Surfaces.*
BIANCHI. — *Leçons de Géométrie différentielle.*
BLASCHKE. — *Leçons de Géométrie différentielle.*

NOTE ADDITIVE.

Au moment de la mise en pages définitive de ce fascicule, deux Notes importantes paraissent aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (M. Masloff, 14 mai 1928, et M. Vasseur, 18 juin 1928). On sait trouver tous les couples isolés ou toutes les familles à un paramètre de surfaces applicables possédant un réseau conjugué commun formé de lignes cylindriques ou coniques; ce problème se ramène, par une coïncidence curieuse, à la détermination des mécanismes, soit transformables (couples isolés), soit déformables (déformation continue), constitués par deux courbes et j'ai traité moi-même ce problème au *Journal de Liouville* (9e série, t. 1, 1922, p. 19-76). D'autre part, je sais que M. Finikoff, professeur à Moscou, a publié, en russe, un Mémoire considérable sur les réseaux permanents.

J'adresse enfin un hommage ému à la mémoire du géomètre italien Bianchi, mort à 72 ans, au début de juin 1928; Darboux et Bianchi ont bien voulu s'intéresser à mes travaux et ces deux fascicules ont été rédigés sous l'inspiration directe des découvertes de ces deux illustres géomètres.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION I

CHAPITRE I.

FAMILLES DE SURFACES ISOMÉTRIQUES. PARALLÉLISME, STRATIFICATION. DÉFORMATION INFINIMENT PETITE. RÉSULTATS DE M. BIANCHI SUR LES QUADRIQUES.

1. Nature des familles ou couples isométriques à chercher 2
2. Surfaces de révolution; surfaces hélicoïdales 3
3. Surfaces minima adjointes 8
4. Surfaces de translation à profils de translation plans situés dans deux plans rectangulaires 10
5. Déformation des surfaces tétraédrales 10
6. Surfaces à courbure moyenne constante 18
7. Déformation avec conservation des rayons principaux 22
8. Déformation où une série de lignes de niveau reste lignes de niveau .. 23
9. Couples isolés de surfaces applicables 24
10. Parallélisme de Peterson. Réseaux conjugués 25
11. Réseau conjugué persistant dans une déformation 27
12. Déformation des quadriques. Résultats de M. Bianchi 33
13. Déformation infiniment petite 37

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE LA DÉFORMATION DU POINT DE VUE FINI.

1. Applicabilité des surfaces réelles par régions réelles ou imaginaires.. 42
2. Régions d'un ds^2. Correspondance de point réel à point imaginaire.. 47
3. Isométrie et applicabilité 49
4. Détermination d'une surface convexe par son ds^2. Résultats de M. H. Weyl 52

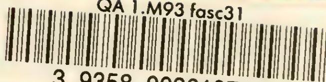
NOTE ADDITIVE 64

4/14/70 DATE LOANED

GAYLORD 3563			PRINTED IN U.S.A.

PARIS.

83II



LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS et Cie

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

Envoi dans tou valeur sur Paris.
Frais de po Seine 22520.

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Nouvelle collection fondée sous le haut patronage des Académies Française et Etrangères, avec la collaboration de nombreux savants.

Fascicules parus :

Paul Appell. — Sur une forme générale des équations de la dynamique. (fasc. I)........ 15 fr.
G. Valiron — Fonctions entières et fonctions méromorphes (fasc. II). 15 fr.
Paul Appell. — Séries hypergéométriques de plusieurs variables, polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques de l'hyperespace (fasc. III). 15 fr.
M. d'Ocagne. — Esquisse d'ensemble de la Nomographie (fasc. IV). 15 fr.
P. Lévy. — Analyse fonctionnelle (fasc. V). In-8 de 56 pages........ 15 fr.
E. Goursat. — Le problème de Bäcklund (fasc. VI) in-8 de 53 pages... 15 fr.
A. Buhl. — Séries analytiques. Sommabilité (fasc. VII), 55 pages..... 15 fr.
Th. de Donder. — Introduction à la Gravifique einsteinienne (fasc VIII), 53 pages........ 15 fr.
E. Cartan. — La géométrie des espaces de Riemann (fasc. IX), 58 p. 15 fr.
P. Humbert. — Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu (fasc. X). 15 fr.
G. Bouligand — Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet (fasc. XI)........ 15 fr.
R. Gosse. — La méthode de Darboux pour les équations $s = f(x, y, z, p, q)$. (fasc. XII)........ 15 fr.
A. Véronnet. — Figures d'équilibre et Cosmogonie (fasc. XIII)...... 15 fr.
Th. De Donder. — Théorie des Champs gravifiques (fasc. XIV) .... 15 fr.
S. Zaremba. — La logique des Mathématiques (fasc. XV)........ 15 fr.
A. Buhl. — Formules stokiennes (fasc. XVI)........ 15 fr.
G. Valiron. — Theorie générale des séries de Dirichlet (fasc. XVII). 15 fr.
A. Sainte-Laguë — Les Réseaux (ou Graphes), 64 p. (fasc. XVIII).. 15 fr.
R. Lagrange. — Calcul différentiel absolu (fasc. XIX)........ 15 fr.
A. Bloch. — Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité (fasc. XX)........ 15 fr.
M Janet. — Systèmes d'équations aux dérivées partielles (fasc. XXI). 15 fr.
L. Godeaux. — Transformations birationnelles du plan (fasc. XXII). 15 fr.
Georges Rémoundos. — Extension aux fonctions algébroïdes multiformes du théorème de M. Picard et de ses applications (fasc. XXIII)........ 15 fr.
N.-E. Nörlund. — Sur la « Somme » d'une fonction (fasc. XXIV).... 15 fr.
Georges Darmois. — Les équations de la gravitation einsteinienne (fasc. XXV)........ 15 fr.
Bertrand Gambier. — Déformation des surfaces étudiée du point de vue infinitésimal (fasc. XXVI)........ 15 fr.
Paul Appell. — Le problème géométrique des déblais et remblais (fasc. XXVII)........ 15 fr.
Émile Cotton. — Approximations successives et équations différentielles (fasc. XXVIII)........ 15 fr.
C. Guichard. — Les courbes de l'espace à n dimensions (fasc. XXIX). 15 fr.
Ludovic Zoretti. — Les principes de la mécanique classique (fasc. XXX)........ 15 fr.

83116-28 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.